3. BÖLÜM
ANALİTİK FONKSİYONLAR
(KOMPLEKS TÜREV)

KOMPLEKS TÜREVLENEBİLME

Reel değişkenli fonksiyonları incelerken aralıklar üzerinde tanımlanan fonksiyonları göz önüne almıştık. Kompleks değişkenler için tanım bölgelerini benzer şekilde seçeceğiz.

3.1. Tanım: U açık bir küme z, U'nun bir noktası ve f 'de U üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonu z noktasında kompleks türevlenebilen bir fonksiyondur denir. Bu limit,

$$f'(z) \text{ veya } \frac{df}{dz}$$

ile gösterilir.

Kompleks türevlenebilmeyi reel türevlenebilme ile karıştırmamak için, kompleks tümlenebilen fonksiyonlara analitik fonksiyonlar denmesi adettendir. Bundan sonraki derslerimizde türevlenebilme her zaman kompleks anlamda olacaktır.

Reel analiz derslerindeki türevlenebilmenin temel özellikleriyle ilgili genel ispatlar kompleks türevlenebilme içinde geçerlidir. Şimdi onları tekrar inceleyelim.

3.1. Teorem: f ve g fonksiyonları bir U açık kümesinin bir z noktasında türevlenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

biçiminde olup f ve g fonksiyonlarının $f+g$ toplamları bir z noktasında türevlenebilirdir.

İspat:

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(z+h)-(f+g)(z)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[f(z+h)-f(z)]+[g(z+h)-g(z)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\\
&= f'(z)+g'(z)
\end{aligned}
$$

Örnek: $f(z) = z^3 - 2z^2$ ise $f'(z) = 3z^2 - 4z$

3.2. Teorem: f ve g fonksiyonları bir U açık kümesinin bir z noktasında türevlenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + g'(z) \cdot f(z)$$

biçiminde olup f ve g fonksiyonlarının $f \cdot g$ çarpımları bir z noktasında türevlenebilirdir.

İspat: Bunu ispatlayabilmek için önce Newton oranım yazalım,

$$\frac{f(z+h)g(z+h)-f(z)g(z)}{h}$$

Şimdi bunun payının

$$f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z+h) + f(z)\, g(z+h) - f(z)\, g(z)$$

şeklinde olduğunu düşünelim.

$$\frac{f(z+h)g(z+h)-f(z)g(z)}{h} = \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\, g(z+h) + f(z)\,\frac{g(z+h)-g(z)}{h}$$

$$(f+g)'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\, g(z+h) + f(z)\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}$$

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

elde edilir.

3.3. Teorem: f ve g fonksiyonları bir U açık kümesinin bir z noktasında türevlenebilen fonksiyonlar olsunlar.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)\cdot g(z) - f(z)\cdot g'(z)}{[g(z)]^2}, \qquad (g(z) \neq 0)$$

biçiminde olup f ve g fonksiyonlarının $\frac{f}{g}$ çarpımları bir z noktasında türevlenebilirdir.

İspat: $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$ şeklinde yazılabileceği için $\frac{1}{g}$ nin türevlenebilir olduğunu göstermek, bu çarpımın türevlenebilir olduğunu göstermek demektir.

$$\frac{\frac{1}{g(z+h)-g(z)}}{h} = -\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\frac{1}{g(z+h)\cdot g(z)}$$

biçiminde yazılabileceğinden,

$$\left(\frac{1}{g(z)}\right)' = \lim_{h\to 0} -\frac{g(z+h)-g(z)}{h}\frac{1}{g(z+h)g(z)} = -\frac{g'(z)}{(g(z))^2}$$

bulunur. Buna göre

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = f'(z)\frac{1}{g(z)} - f(z)\frac{g'(z)}{[g(z)]^2} = \frac{f'(z)\cdot g(z) - f(z)\cdot g'(z)}{[g(z)]^2}$$

sonucu bulunur. //

Reel analizde olduğu gibi bir çarpımın türevi ve tümevarım metodundan görürüz ki,

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$$

dir.

Örnek: $f(z) = \frac{z^3-5z^2-1}{2z-1}$, $(2z-1 \neq 0)$

fonksiyonun türevi,

$$f(z) = \frac{(3z^2-10z)(2z-1)-(z^3-5z^2-1)2}{(2z-1)^2} = \frac{4z^3-13z^2+10z+2}{(2z-1)^2}$$

olur.

3.2. Tanım: $U, V \in \mathbb{C}$ de açık kümeler ve

$f : U \to V$ ve $g : V \to \mathbb{C}$

olsunlar. Öyleki f altındaki görüntü V'nin içinde olsun. Buradan,

$$(g \circ f)(z) = g(f(z))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona bileşke fonksiyon denir.

3.4. Teorem (Zincir Kuralı): $w = f(z)$, z noktasında türevlenebilcn bir fonksiyon olsun ve ayrıca w noktasında türevlenebilen bir g(z) fonksiyonu göz önüne alalım. O zaman, bileşke fonksiyonun türevi,

$$(gof)'(z) = g'\big(f(z)\big)f'(z)$$

şeklindedir.

İspat: Kabul edelim ki, f,z noktasında türevlenebilen bir fonksiyon ve

$$\varphi(h) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)$$

olsun. Buradan,

$$f(z+h) - f(z) = f(z)h + h\varphi(h) \qquad (1)$$

ve

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0 \qquad (2)$$

dur. Yani fonksiyon türevlenebilen bir fonksiyonsa, çok küçük $h \neq 0$ değerleri için tanımlı bir $\varphi(h)$ fonksiyonu mevcuttur ve $\varphi(0) = 0$ da alabiliriz. $h = 0$ için, (1) formülü geçerli olacaktır.

Tersine farz edelim ki, yeterli küçük h'lar için tanımlanmış bir $\varphi(h)$ fonksiyonu mevcuttur, öyle ki,

$$f(z+h) - f(z) = ah + h\varphi(h) \qquad (3)$$

ve

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0 \qquad (4)$$

olsun. Bu durumda f(z) nin f(z) türevi mevcuttur. Bu türev a'ya eşittir. Çünkü (3) ifadesinin her iki tarafı h'ye bölünüp, $h \to 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} (a+\varphi(h)) = a$$

$$f'(z) = a$$

olur. Yani, (3) ve (4) eşitliklerini sağlayan fonksiyonun varlığı türevin varlığına denktir. Diğer taraftan

$$w = f(z) \text{ ve } k = f(z+h) - f(z)$$

olsun. Öyleki,

$$g(f(z+h)) - g(f(z)) = g(w+k) - g(w)$$

yazılır. Şimdi türevin varlığından dolayı,

$$\lim_{k\to 0} \psi(k) = 0$$

ve

$$g(w+k) - g(w) = g'(w)\, k + k\psi(k)$$
$$= g'(w)(f(z+h) - f(z)) + (f(z+h) - f(z))\, \psi(k)$$

olacak şekilde $\psi(k)$ fonksiyonu mevcuttur. Buradan,

$$\frac{(g\circ f)(z+h)-(g\circ f)(z)}{h} = g'(z)\,\frac{f(z+h)-f(z)}{h} + \frac{f(z+h)-f(z)}{h}\,\psi(k)$$

yazılır, h sıfıra götürüldüğünde f 'nin sürekliliğinden dolayı k'da sıfıra gider. Böylece $\psi(k) \to 0$ kabulümüzden dolayı,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(z+h)-(g\circ f)(z)}{h} = g'(w)f'(z) + 0$$

ve

$$(g \circ f)'(z) = g'(w)\, f(z) = g'(f(z))\, f'(z)$$

bulunur.

3.3. Tanım: U açık kümesinde tanımlanan bir fonksiyon bu kümenin her noktasında türevlenebilirse, bu fonksiyon U'da türevlenebilirdir denir. Yani f, U'da analitiktir denir.

Yine U ve V açık kümeleri ve $f : U \to V$ fonksiyonunu göz önüne aldığımızda eğer bu fonksiyon analitikse ve $g : V \to U$ analitik ters fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna analitik izomorfizm denir.

Eğer f, U'nun analitik izomorfizmi ise, o zaman f analitik otomorfizmdir.

CAUCHY-RİEMANN DENKLEMLERİ

U açık kümesi üzerinde bir f fonksiyonu alalım ve reel ile sanal kısımlarına göre,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

biçiminde yazalım. Şimdi aklımıza bu fonksiyonun hangi şartlar altında türevlenebilir olduğu sorusu gelebilir. Gerçi bu sorunun cevabı daha sonraki konularda ayrıntılı olarak verilecektir. Ancak burada da sırası gelmişken kısaca gerekli şartlan araştıracağız. Sabit bir $z \in U$ için $f'(z) = a + i\, b$ olsun. $h, k \in \mathbb{R}$ için, $w = h + i\, k$ alalım ve farz edelim ki f, z de tiirevlenebilirdir. O zaman türevlenebilme tanımına göre

$$f(z + w) - f(z) = f'(z)w + \sigma(w)w$$

yazılır. Burada,

$$\lim_{w \to 0} \sigma(w) = 0$$

$$f(z) \cdot w = (a + ib)(h + ik) = ah - bk + i\,(bh + ak)$$

olur. Diğer taraftan,

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

şeklindeki $f : U \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu için,

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = (ah - bk, bh + ak) + \sigma_1(h, k) + \sigma_2(h, k)$$

yazılır. Burad σ_1 ve σ_2, h ve k ile birlikte sıfıra giden fonksiyonlardır.

Eğer f 'nin analitik olduğunu kabul edersek f 'nin reel anlamda türevlenebileneğini söyleriz ve türevini,

$$J_f(x,y)=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Jacobien matrisi ile gösteririz.

$$f'(z) = a + ib \text{ ise } f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ve } a = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ise } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$b = -\frac{\partial u}{\partial y} \text{ ve } b = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ ise } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

dir. (1) ve (2) denklemlerine Cauchy-Riemann denklemleri denir. (1), (2) deki kısmi türevlerin varlığı $f'(z)$ nin varlığı ile mümkündür.

Karşıt olarak $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ fonksiyonları Cauchy-Riemann denklemleri olan ve reel anlamda sürekli türevlere sahip olan fonksiyon iseler,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

fonksiyonu kompleks türevlenebilen bir fonksiyondur. Bunu görmek için yukarıdaki işlemleri sondan başa doğru yaparız.

$$\Delta f = a^2 + b^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

yazılacağından $\Delta f \geq 0$ ve $\Delta f \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $f'(z) \neq 0$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\Delta f(x,y) = |f'(z)|^2$$

olduğunu da görmek zor değildir. Yukarıdaki ifadeleri toparlıyarak tamamen aynı olan aşağıdaki teoremi ifade edelim.

3.5. Teorem: U açık kümesinde tanımlı,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

fonksiyonunun $z = x + i\,y \in U$ noktasında türevli olabilmesi için gerek ve yeter şart bu noktada $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ kısmi türevlerinin mevcut, sürekli ve

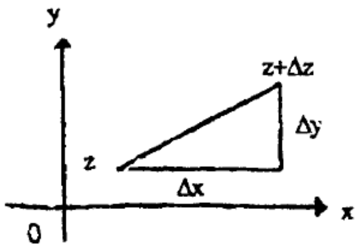
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

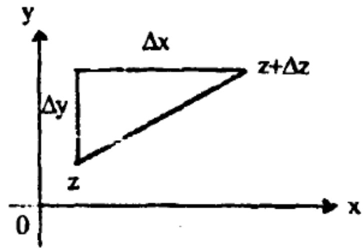
denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ fonksiyonu bir z noktasında türevli olsun. Yani,

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

limiti mevcut olsun.





Hangi yönde (doğrudan) yaklaşırsak yaklaşalım, bu limit mevcuttur. O halde, $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ ifadesinde önce Δy yi ve sonrada Δx i sıfıra götürerek Δz yi sıfıra götürebiliriz. $\Delta y = 0$ için, $\Delta z = \Delta x$ olacağından

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $\Delta x = 0$ için, $\Delta z = i\,\Delta y$ ve

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta x)-v(x,y)}{\Delta y} \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

bulunur. Türevlerin de birbirine eşit olması gerektiğinden

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

sonucu elde edilir.

$\Leftarrow$: u ve v'nin kısmi türevleri mevcut, sürekli ve Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa,

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$$

yazılır. (Burada iki değişkenli fonksiyonlarda ortalama değer teoremi uygulandı) Aynı şekilde,

$$\Delta u = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y$$

yazılır. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ve $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ değerleri Δx ve Δy ile sıfıra yaklaşsınlar. Şimdi Δf yi teşkil edelim.

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(z+\Delta z) - f(z)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y\right)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y\right)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \delta_1\Delta x + \delta_2\Delta y\end{aligned}$$

ifadesini Cauchy-Riemann denklemlerini kullanarak elde ederiz. Burada δ_1 ve δ_2 forksiyonlan Δz ile birlikte sıfıra giderler.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \delta_1\frac{\partial x}{\partial z} + \delta_2\frac{\partial y}{\partial z}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

yani,

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

($\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \le 1$ ve $\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le 1$ ise $\Delta z = 0$ için sıfıra gider.)

Örnek: $f(z) = |z|^2$ fonksiyonunun analitik olup olmadığım araştırınız.

Çözüm: $f(z) = |z|^2 = \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2 + y^2$ olur.

$u(x,y) = x^2 + y^2$ ve $v(x,y) = 0$

bulunur.

$u_x = 2x,\ u_y = 2y,\ v_x = 0,\ v_y = 0$

$u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$

denklemleri ancak (0,0) noktasında sağlanırlar**.** O halde bu fonksiyonun sadece (0,0) noktasında türevi vardır. $\mathbb{C}$ de analitik değildir.

HARMONİK FONKSİYONLAR

$S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: S \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. f, S'de analitik olduğundan $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ ifadesindeki u ve v'nin her mertebeden kısmi türevleri vardır ve bunlar süreklidirler. Cauchy-Riemann denklemleri de dikkate alınırsa,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ ve } \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlere Laplace denklemleri denir.

3.4. Tanım (Harmonik Fonksiyonlar): Laplace denklemini sağlayan fonksiyonlara harmonik (Potansiyel)fonksiyonlar denir.

Böylece analitik bir f fonksiyonunun reel ve sanal kısımları harmonik fonksiyonlardır.

3.5. Tanım (Harmonik Eşlenik Fonksiyonlar): u ve v gibi harmonik fonksiyon verilsin. Bu fonksiyonlar Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorlarsa bu fonksiyonlara harmonik eşlenik fonksiyonlar adı verilir.

Böylece analitik bir fonksiyonun reel ve sanal kısımlarını oluşturan harmonik fonksiyonlardan biri diğerinin harmonik eşleniğidir. Reel ve sanal kısımlarından biri verildiğinde integral yolu ile diğer kısım bulunur. Ancak genellikle $v = v(x,y)$ tek değerli olmadığından dv notasyonunu kullanmamak gerekir.

$$u = u(x,y), v = v(x,y)$$

fonksiyonlarından.

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

eşitliği yazılır ve

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \text{ sabit}$$

ile, u nun eşleniği olan v bulunur ve $f(x,y) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ analitik fonksiyonu teşkil edilir.

Örnek: $u = u(x,y) = y^3 - 3x^2 y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun harmonik olup olmadığını araştırınız. Eğer harmonikse eşleniğini bularak f(z) analitik fonksiyonunu belirtiniz.

Çözüm: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ Laplace denklemine bakalım.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y, \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$$

dir.

Bu değerler Laplace denkleminde yerine yazılırsa $\Delta u = 6y - 6y = 0$ olur. O halde u(x,y) fonksiyonu harmoniktir. Şimdi Cauchy-Riemann denklemlerinden faydalanarak v(x,y) yi bulalım.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy,\ \ v(x,y) = -3xy^2 + \varphi(x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + \varphi'(x)$$
bulunur.
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
denkleminden,
$$-(3y^2 - 3x^2) = -3y^2 + \varphi'(x)$$
elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa,
$$\varphi(x) = x^3 + c$$
bulunur. Bu değeri v(x,y) de yerine yazarsak,
$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + c$$
harmonik eşlenik fonksiyonu bulunur.

Analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları birbirinin harmonik eşleniği olduğundan, $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ denkleminde u ve v fonksiyonları yerine yazılırsa,
$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(-3xy^2 + x^3 + c) = i(z^3 + c)$$
analitik fonksiyonu teşkil edilir.

u(x,y) ve v(x,y) fonksiyonlar harmonik eşlenik ise,
$$u(x,y) = c_1,\ \ v(x,y) = c_2$$
ifadeleri ortogonal iki eğri ailesi teşkil ederler. Çünkü $u(x,y) = c_1$ ailesinin diferensiyel denklemini yazarsak.
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$
bulunur. Buradan ortogonallık şartını kullanırsak,
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\left(-\frac{dy}{dx}\right)} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
olur. Şimdi Cauchy-Riemann şartlarım göz önüne alırsak,
$$\frac{\partial v}{\partial y}\left(-\frac{dy}{dx}\right) - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$
yazılır ki bu da $v(x,y) = c_2$ ailesinin diferansiyel denklemidir.

Örnek: $f(x) = |z|$ fonksiyonu $z = 0$ noktasında türeviimidir?

Çözüm: $(x) = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ olur. Buradan
$$u(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2} \text{ ve } v(x,y) = 0$$
bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$x = y = 0$ için, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ elde edilir. Fakat kısmi türevler $z = 0$ noktasında süreksizdir. Buna göre

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

olduğunu biliyoruz. Önce OX ekseni yönünde türev alalım,(bu eksen boyunca $y = 0$ dır)

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{|z|-0}{z-0} = 1, \lim_{z\to 0^-} \frac{|z|-0}{z-0} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{x}{x} = -1$$

sonra, OY ekseni boyunca (0,0) noktasına yaklaşalım.

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{|z|-0}{z-0} = \lim_{y\to 0^+} \frac{|iy|}{iy} = -i, \lim_{z\to 0^-} \frac{|z|-0}{z-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|-iy|}{iy} = i$$

dir. O halde kısmi türevleri süreksizdir. Bu fonksiyonun $z = 0$ noktasında türevi yoktur.

Örnek: Cauchy-Riemann denklemlerinin kutupsal koordinatlarda,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{dv}{d\theta}, \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Riemann şartlarını,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

olduğunu biliyoruz, $f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ ve

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, I = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ olsun.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{du}{d\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{du}{dr}\cdot\cos\theta + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot(-\sin\theta) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{du}{d\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{du}{dr}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\cos\theta \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{dv}{dr}\cdot\cos\theta + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot(\sin\theta) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{dv}{d\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{dv}{dr}\cdot\sin\theta + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}\cdot\cos\theta \qquad (4)$$

olarak elde edilir.

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dv}{dy}$ Cauchy-Riemann denkleminden, (1) ve (4) denklemleri kullanılan

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \sin\theta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \cos\theta$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \cos\theta = \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) \cdot \sin\theta \qquad (5)$$

bulunur.

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dv}{dx}$ Cauchy-Riemann denkleminden, (2) ve (3) denklemleri kullanılan

$$-\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin\theta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \cos\theta = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \cdot \sin\theta$$

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \sin\theta = \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \cdot \cos\theta \qquad (5)$$

bulunur.

(5) denklemi sin θ ve (6) denklemi cos θ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

bulunur.

Benzer şekilde (5) denklemi $-\sin\theta$ ve (6) denklemi $\cos\theta$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

elde edilir.

Örnek: $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ fonksiyonunun analitik olduğu kümeyi bulunuz.

Çözüm: $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ fonksiyonunun analitik olduğu noktalar $z \neq 1$ noktalandır. $A = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ kümesidir.

Örnek: $f(z)=\begin{cases}\frac{z^2}{2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$
olarak tanımlanan fonksiyonun $z=0$ noktasında, Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığı halde analitik olmadığım gösteriniz.

Çözüm: $f(x,y)=u+iv,$
$$f(0)=0=u(0,0)+i\,v(0,0)$$
olacağından,
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$
olur. O halde.
$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-0}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{(\bar{z})^2}{z^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1$$
$$\lim_{z\to 0}\frac{(\bar{z})^2}{z^2}=\lim_{y\to 0}\frac{(-iy)^2}{(iy)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{-y^2}=1$$
bulunur. Bir de, $y=x\to 0$ doğrusu boyunca yaklaşalım.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-ix)^2}{(x+ix)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-i)^2}{x^2(1+i)^2}=-1$$
olur. Bu sonuca göre limit yoktur. O halde analitik değildir.

Örnek: $f(z)=\begin{cases}\frac{z^5}{|z|^4}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ olarak tanımlanan fonksiyon için, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$
limitinin olmadığmı gösteriniz.

Çözüm: $z=r\,e^{i\theta}$ alalım. Buradan
$$f(z)=\frac{r^5e^{5i\theta}}{r^4}=re^{5i\theta}$$
dir. $z\neq 0$ için
$$\frac{f(z)}{z}=\frac{r^5e^{5i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{4i\theta}$$
olduğundan sıfır noktasına $\theta=0$ ışını boyunca yaklaşalım.
$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{\theta\to 0}e^{4i\theta}=1$$
olur. $\theta=\frac{\pi}{4}$ ışını boyunca yaklaşılırsa,
$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}e^{4i\theta}=-1$$

bulunur. Buradan,

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}$$

değerinin olmadığı görülür. O halde f fonksiyonu $z=0$ noktasında analitik değildir.

Örnek: $f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ fonksiyonunun $z=0$ noktasında türevli olmadığım gösteriniz.

Çözüm: $z=0$ noktasına $y=mx$ doğrusu boyunca yaklaşalım. Bu halde,

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{z\to 0}\frac{m^2x^3}{x^2(1+m^4x^2)}=\lim_{z\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2}=0$$

Bir de, $x=y^2$ eğrisi üzerinden $z=0$ noktasına yaklaşalım.

$$\lim_{z\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{z\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}$$

olduğundan limit yoktur. Yani, f(z) fonksiyonu $z=0$ noktasında türevli değildir. Ayrıca $z=0$ noktalarında Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmadığından verilen fonksiyon hiç bir noktada analitik değildir.

Örnek: $f(z)=\begin{cases}e^{-z^{-4}}, & z\neq 0\\ 0\ , & z=0\end{cases}$ fonksiyonu $z=0$ noktasında türevlenebilir mi ?

Çözüm: $z=r\,e^{\pi i/4}$ alalım. Buna göre,

$$e^{-x^{-4}}\;=\;e^{-(r\,e^{\pi i/4})^{-4}}\;=\;e^{(-r^{-4}\,e^{i\pi})}\;=\;e^{(1/r)^4}$$

olur. Böylece

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{r\to 0}e^{(1/r)^4}=\infty$$

bulunur. Öyleyse $\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ yoktur. Yani f(z) fonksiyonu $z=0$ noktasında türevli değildir.

Örnek: $u=xy$ fonksiyonu fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz. Harmonik eşleniğini ve f(z) fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ olduğundan $u=xy$ fonksiyonu harmoniktir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ise } v = \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x)$$

ve

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x$$

bulunur. Buradan

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

elde edilir. O halde,

$$v = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + c$$

harmonik eşlenik fonksiyonu bulunur. Buradan f(z) fonksiyonu,

$$f(z) = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2) + ic$$

ve $c = 0$ alınırsa,

$$f(z) = -\frac{i}{2}z^2$$

biçiminde olur.

Örnek: $u = \sin x \cos hy$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz. Harmoni eşleniğini ve f(z) fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cos hy \text{ ise } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \cos hy$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sin hy \text{ ise } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x \cos hy$$

olduğundan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

bulunur. u fonksiyonunun harmonik eşleniği,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cos hy = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ise } v = \sin hy \cos x + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \sin hy + \varphi'(x) = \frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x \sin hy$$

$$\varphi'(x) = 0 \text{ ise } \varphi(x) = c$$

olduğundan $c = 0$ alınırsa,

$$v(x, y) = \sin hy \cos x$$

bulunur. Ayrıca, $f(z) = \sin z$ olarak elde edilir.

ELEMENTER FONKSİYONLAR

3.6. Tanım (Tam Fonksiyon): Sonlu kompleks düzlemde analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir.

1. Üstel Fonksiyonlar

3.7. Tanım (Üstel Fonksiyon): Euler formülü ile reel değerli fonksiyonlar yardımıyla,

$$\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

olarak verilen fonksiyona üstel fonksiyon denir.

i) $y = 0$ için (radyan olarak ölçülen y'nin sıfır olması halinde)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x$$

olur ki sadece reel değerli üstel fonksiyon elde edilir.

ii) $x = 0$ için,

$$e^z = e^{x+iy} = \cos y + i \sin y$$

olur.

iii) $f(z) = e^z$ fonksiyonu tam fonksiyondur.

$f(z) = e^z = u + i\,v$ ise $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$

bulunur. Her meretebeden kısmi türevleri mevcut ve süreklidir. Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır.

iv) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = u + i\,v$ ise $\dfrac{d}{dz}\exp z = \exp z$

v) $e^z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ ise $\rho = e^x, \theta = y$ ve $|e^z| = e^x, \arg e^z = y$ olduğu aşikardır.

$$|e^z| > 0, e^z \neq 0$$

olur.

vi) $e^z = \rho_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ ve $e^z = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

ise,

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) \end{aligned}$$

$e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}, (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$

olduğundan,

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

yazılır.

vii) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ aynı şekilde bulunur.

viii) $\exp(z+2\pi i) = \exp z$ dir. Yani üstel fonksiyon periyodiktir ve periyoduda $2\pi i$ dir.

ix) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x(\cos y - i\sin y) = \overline{(e^z)}$$

bulunur.

x) $z_1 = [r_1, \theta_1],\ z_2 = [r_2, \theta_2]$ olsun

$$z_1z_2 = [r_1r_2, \theta_1+\theta_2] = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \theta_1 - \theta_2\right] = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

yazılır.

2. Trigonometrik Fonksiyonlar

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ve $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$
denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \text{ ve } \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2}$$

olur.

3.8. Tanım:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \text{ ve } \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \ \sec z = \frac{1}{\cos z}, \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

dir.

i) $\cos z = \cos (x + iy)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(e^{-y+ix} + e^{y-ix}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x - i \sin x) \\ &= \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x - i\ \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\ \sin x \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}$$

ii) $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

iii) $\sin(iy) = i \sinh y, \cos(iy) = \cosh y$

iv) $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$$

$$\frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$$

v) Trigonometrik fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

Hiperbolik Fonksiyonlar

3.9. Tanım:
$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ ve $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},\ \text{sech}\, z = \frac{1}{\cosh z}, \text{csch}\, z = \frac{1}{\sinh z}$

dir.

i) Hiperbolik fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

ii) $\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$

$\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$

$\frac{d}{dz}\tanh z = \text{sech}^2\, z$

$\frac{d}{dz}\coth z = -\text{csch}^2 z$

$\frac{d}{dz}\text{sech}\, z = \text{sech}\, z \tanh z$

$\frac{d}{dz}\text{csch}\, z = \text{csch}\, z \coth z$

iii) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

iv) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

v) $\sinh (z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1$

$\cosh (z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \sinh z_1$

$\sinh 2z = 2\sinh z \cosh z$

vi) $\sinh (-z) = -\sinh z$

$\cosh (-z) = \cosh z$

$\sinh (iz) = i \sin z$

$\cosh (iz) = i \cos z$

4. Logaritma Fonksiyonu

3.10. Tanım: x reel ve pozitif ise, $e^u = x$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Bu çözüme x'in logaritması denir ve log x ile gösterilir. Şimdi x yerine z kompleks sayısını alalım. Bu dununda $e^w = z$ denklemini teşekkül ettirmiş oluruz. $u, v \in \mathbb{R}$ ve $w = u + iv$ ise,

$$e^u(\cos v + i \sin v) = z$$

bulunur.

$$|z| = e^u, u = \log |z|$$

elde ederiz. Buradan da,

$$|z|(\cos v + i \sin v) = z$$

yazılır. $v = \arg z$ olduğundan $e^w = z$ denkleminin çözümü,

$$w = \log |z| + i \arg z$$

olarak bulunur, arg z nin sonsuz sayıda değeri olduğundan log z fonksiyonu çok değerli bir fonksiyondur (arg z nin iki değeri arasındaki faik $2\pi i$ nin tam katlandır). Yani her bir z yu log z nin sonsuz sayıda değerleri tekabül eder, arg z nin verilen bir değerine tekabül eden log z ye logaritmanın bir dalı deriz, arg z nin esas değerine $(-\pi < \arg z \leq \pi)$ tekabül eden dala, logaritmanın esas dalı adı verilir, z nin reel ve pozitif değeri için log z nin esas değeri adi logaritmaya eşittir. Bu durumda esas değer log z ile gösterilir ki,

$$e^w = z, z = r\, e^{i(\theta \pm 2\pi k)}$$

olduğunu göz Önüne alırsak,

$$w = \log z = \log r + i(\theta \pm 2\pi k)$$

yazılır. O halde, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\log z = \log r + i(\theta \pm 2\pi k)$$
$$\log z = \log |z| + i(\theta \pm 2\pi k)$$

şeklinde yazılır, $r > 0, k = 0$ ve $-\pi < \theta \leq \pi$ alınacak olursa,

$$\log z = \log r + i\theta$$

olur. Bu dala log z nin esas değeri denir.

$$\log z = \log r + i\theta, \ (-\pi < \theta \leq \pi)$$

alalım,

$$u = \log r, \ v = \theta$$

olduğundan,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \ \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

olur ve Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır. O halde, $\log z = \log r + i\theta$ fonksiyonu tanım bölgesinde analitiktir. Hatta fazladan,

$$\frac{\partial}{\partial z}\log z = \exp(-i\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r\exp(i\theta)} = \frac{1}{z}$$

bulunur. O halde, log z nin türevi $\frac{1}{z}$ dir. $(z \neq 0, -\pi < \arg z < \pi)$ dir. $\log z = \log r + i\theta$ şeklinde tanımlanan log z fonksiyonu $r > 0$ ve $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ sınırlamasıyla tek değerli ve sürekli yapılabilir. $w = \log z$ olduğunda,

$$e^w = e^{\log r + i\theta} = e^{\log r}e^{i\theta} = z$$

ve

$\exp(\log z) = z, (z \neq 0)$

tersine, eğer $e^w = w$ ve $z = x + iy$ ise,

$$\log w = \log (e^x e^{i(y \pm 2k\pi)})$$
$$= \log e^x + \log e^{i(y \pm 2k\pi)}$$
$$= x + i(y \pm 2k\pi)$$

olur. Eğer $k = 0$ alırsak,

$$\log w = z \text{ ve } \log e^z = z$$

şeklinde olduğundan, bir bakıma logaritma fonksiyonu ile üstel fonksiyon birbirinin tersidir.

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ olmak üzere $(r_1 r_2 > 0)$ dır.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$
$$\log (z_1 z_2) = \log (r_1 r_2) + i\,(\theta_1 + \theta_2)$$
$$\log z_1 = \log r_1 + i\,\theta_1 \text{ ve } \log z_2 = \log r_2 + i\,\theta_2$$
$$\log z_1 + \log z_2 = \log (r_1 r_2) + i\,(\theta_1 + \theta_2)$$

bulunur. O halde,

$$\log (z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$$

eşitliği elde edilir. //

Aynı düşünce ile,

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$$

yazılır. Ayrıca,

$$\log z^m = m \log z$$
$$\log z^{1/n} = \frac{1}{n} \log z$$
$$z^{m/n} = e^{m/n \log z}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek: $i^{(1-i)}$ ifadesinin bütün değerlerini bulunuz.

Çözüm: $i^{(1-i)} = e^{(1-i) \log i}$

$$= e^{(1-i)\,[\log |i| + i \arg\,(i + 2k\pi i)]}$$
$$= e^{(1-i)(\pi i/2\, + 2k\pi i)}$$
$$= e^{i(1-i)(\pi/2\, + 2k\pi)}$$
$$= e^{\pi/2\, + 2k\pi} e^{i(\pi/2\, + 2k\pi)}$$

yazılır.

$k = 0$ ise $i^{(1-i)} = e^{\pi/2} e^{i\pi/2} = i\, e^{\pi/2}$

$k = 1$ ise $i^{(1-i)} = e^{5\pi/2} e^{i5\pi/2} = i\, e^{5\pi/2}$

...

$k = n$ ise $i^{(1-i)} = e^{\pi/2 + 2k\pi} e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}$

sonuçları elde edilir.

Örnek: $\cos z = \frac{1}{z}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 1$$
$$e^{iz} + e^{-iz} - 1 = 0$$
$$e^{2iz} - e^{iz} + 1 = 0$$

olur. Burada $e^{iz} = t$ denirse, denklem $t^2 - t + 1 = 0$ şekline dönüşmüş olur ve,

$$t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ t_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ t_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2},$$

kökleri bulunur. Buna göre,

$$e^{iz} = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ iz = \log\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} = \log\left|\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right| + i\arg\left(\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right) + 2k\pi i$$

olur.

$$\tan\theta_1 = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \text{ ise } \theta = \frac{\pi}{3}$$
$$\tan\theta_2 = \frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \text{ ise } \theta = \frac{5\pi}{3}$$
$$z = \frac{1}{i} = [\log\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$$

olduğuna göre,

$$z_1 = \frac{1}{i} = [\log 1 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$z_2 = \frac{1}{i} = [\log 1 + i\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

olur.

Örnek: $\log(1+i)$, $\sin i$ ve $e^{2\log(-1)}$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\log(1+i) = \log|1+i| + i\arg(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin i = \frac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1}+e}{2i} = \frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$
$$e^{2\log(-1)} = e^{2(\log 1 + i\arg(-1))} = e^{2i(\pi+2k\pi)} = e^{2\pi i(1+2k)} = 1$$

bulunur.

Örnek: $w = (e^z + 1)^{1/2}$ fonksiyonunun analitik olduğu bölgeyi bulunuz.

Çözüm: w fonksiyonu, log w fonksiyonunun tanımlı ve analitik okluğu bölgede analitiktir. Eğer $w = u + i\,v$ ise, kök fonksiyonunun analitik olduğu bölge,

$$A = \mathbb{C} \setminus \{u + i\,v : u \leq 0, v = 0\}$$

dir. $w = e^z + 1$ olsun. $(e^z + 1)^{1/2}$ fonksiyonunun analitik olduğu bölge A kümesidir. O halde,

$$w = e^z + 1 = (e^x \cos y + 1) + i\,(e^x \sin y) = u + i\,v$$

$$u = e^x \cos y + 1,\ \ v = e^x \sin y$$

olacaktır. $u \leq 0$ olduğundan,

$$e^x \cos y + 1 \leq 0 \qquad (1)$$

v=0 için

$$v = e^x \sin y \qquad (2)$$

olacaktır. $e^x \neq 0$ olduğundan ve (2) den $\sin y = 0$ ve $y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ olur.

$e^x \cos y + 1 \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için, $y = k\pi$ için k tek olmalıdır. Yani, $y = (2n + 1)\pi$ olmalıdır. $e^x \geq 1 = e^0$ ise $x \geq 0$ yazılır.

$$A = \mathbb{C} \setminus \{x + i\,y : x \geq 0, y = (2n + 1)\pi\}$$

olur.

Örnek: $e^z = 1$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm: $z = x + iy$ olsun. Buradan,

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = 1$$

yazılır. Bu eşitliğin sağlanması için $x = 0$ ve $y = 2k\pi$ olmalıdır. O halde, çözüm $z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ dir.

Örnek: $|z - 1| \leq r < 1$ olduğuna göre logaritmanın esas değeri için,

$$|\log z| \leq \frac{r}{1-r}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\log z = \log(1 - (z - l)) = \frac{z-1}{1} + \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} + \cdots$$

yazılır. Buradan,

$$|\log z| \leq r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \cdots \leq r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{r}{1-r}$$

olur. Eşitlik durumu ancak $r = 0$, yani $z = 1$ olması halinde doğrudur.

Örnek:

a) arcsin z ile log z arasında nasıl bir bağına vardır?

b) arctg z ile log z arasında nasıl bir bağına vardır?

Çözüm:

a) $w = \arcsin z$ veya $\sin w = z$ denkleminin çözümlerini bulalım. Buradan,

$$\sin\, w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z$$

olduğundan,

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$$
$$w = -i\log(iz + (1 - z^2)^{1/2})$$

şeklinde olur.

b) Benzer şekilde $\tan\, w = z$ den,

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = iz$$

yazılır. Buradan,

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{i}{2}\log\frac{1 - iz}{1 + iz}$$

denklemi elde edilir.

Örnek: z=x+iy olmak üzere,

$$|\sinh\, y| \leq |\sin z|$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ olduğu için,

$$\begin{aligned}
|\sinh z| &= (\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y)^{1/2} \\
&= \sin^2 x\, (1 + \sinh^2 y + (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y)^{1/2} \\
&= (\sin^2 x + \sinh^2 y)^{1/2} \\
&\geq (\sinh^2 y)^{1/2} \\
&\geq |\sinh y|
\end{aligned}$$

bulunur.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Rahim OCAK, Kompleks Analiz, 2005, ERZURUM.