1. BÖLÜM
ÖLÇÜ UZAYI

ÖLÇÜ KAVRAMI

1.1. Tanım: X bir küme ve U da σ–cebiri olsun. Reel değerli bir μ fonksiyonu,

i) $\mu(\varnothing) = 0$
ii) Her $A \in U$ için $\mu(A) \geq 0$
iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

aksiyomlarını sağlanıyorsa bu μ fonksiyona bir **ölçü** adı verilir. (X, U, μ) üçlüsüne ölçü uzayı adı verilir. Eğer her $A \in U$ için $\mu(A)$ sonlu ise μ'ye bir sonlu ölçü adı verilir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye olasılık ölçüsü adı veilir.

Örnek: En az iki elemana sahip bir X kümesi ile bunun P(X) kuvvet kümesi veriliyor. P (X) üzerinde

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & ; \quad A = \varnothing \\ +\infty & ; \quad A \neq \varnothing \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ dönüşümü ölçü müdür?

Çözüm: i) Tanımdan $\mu(\varnothing) = 0$ dır.

ii) Her $A \in P(X)$ için $\mu(A) \geq 0$ dır.

iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için (A_n), $P(X)$ deki ayrık kümelerin bir dizisi olsun. Üç durum söz konusudur:

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \varnothing$ ise $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ gerçeklenir.

b) $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \leq n_0$ için $A_n = \varnothing$, $\forall\, m, n \geq n_0$ için $A_n, A_m \neq \varnothing$ ve $A_n \cap A_m = \varnothing$ olsun.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$$

olup $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$ dir. Diğer taraftan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu(A_n) = +\infty$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olduğu görülür.

c) Her m,n için $A_n, A_m \neq \varnothing$ ve $A_n \cap A_m = \varnothing$, $A_n \neq \varnothing$ olması (b) benzeri olacağından sonuç gerçeklenir.

Dolayısıyla μ fonksiyonu P(X) üzerinde bir ölçü ve (X, U, μ) ölçü uzayıdır.

Örnek: En az iki elemana sahip bir X kümesi ile bunun P(X) kuvvet kümesi veriliyor. P (X) üzerinde

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 \ ; & A = \varnothing \\ 1 \ ; & A \neq \varnothing \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ dönüşümü ölçü müdür?

Çözüm: i) Tanımdan $\mu(\varnothing) = 0$ dır.

ii) Her $A \in P(X)$ için $\mu(A) \geq 0$ dır.

iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için (A_n), $P(X)$ deki ayrık kümelerin bir dizisi olsun. Üç durum söz konusudur:

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \varnothing$ ise $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ gerçeklenir.

b) $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \leq n_0$ için $A_n = \varnothing$, $\forall\, m, n \geq n_0$ için $A_n, A_m \neq \varnothing$ ve $A_n \cap A_m = \varnothing$ olsun.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$$

olup $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=1$ dir. Diğer taraftan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)=\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\mu(A_n)=1+1+\cdots=+\infty$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\neq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

olduğu görülür. Üçüncü duruma bakmaya gerek yoktur. Dolayısıyla μ fonksiyonu P(X) üzerinde bir ölçü değildir.

Örnek: (a_n) negatif olmayan sayıların dizisi olsun. $P(\mathbb{N})$ üzerinde tanımlı;

$$\mu(E)=\begin{cases} 0 & ;E=\varnothing \\ \sum_{n\in E} a_n & ;E\neq\varnothing \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan μ dönüşümü $P(\mathbb{N})$ üzerinde ölçü müdür?

Çözüm: i) Tanımdan $\mu(\varnothing)=0$ dır.

ii) Keyfi $E\in P(\mathbb{N})$ için

$E=\varnothing$ ise $\mu(E)=0$

$E\neq\varnothing$ ise $\mu(E)=\sum_{n\in E} a_n \geq 0$

dır.

iii) (E_n), $P(\mathbb{N})$ deki ayrık kümelerin dizisi olsun. Üç durum söz konusudur:

a) Her $n\in\mathbb{N}$ için $E_n=\varnothing$ olsun. Bu durumda $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n=\varnothing$ olup $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\mu(\varnothing)=0$ dır. Diğer taraftan her $n\in\mathbb{N}$ için $\mu(E_n)=0$ olduğundan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

gerçeklenir.

b) $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \leq n_0$ için $E_n = \varnothing$, $\forall\, m, n \geq n_0$ için $E_n, E_m \neq \varnothing$ ve $E_n \cap E_m = \varnothing$ olsun. Bu durumda $E_1, E_2, \cdots, E_{n_0}$ kümeleri ayrık olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n_0} E_k\right) \\
&= \sum_{n \in (E_1 \cup \cdots \cup E_n)} a_n \\
&= \sum_{n \in E_1} a_n + \sum_{n \in E_2} a_n + \cdots + \sum_{n \in E_{n_0}} a_n \\
&= \mu(E_1) + \mu(E_2) + \cdots + \mu(E_{n_0}) \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} \mu(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)
\end{aligned}$$

olur.

c) $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ için $E_n, E_m = \varnothing$ ve $E_n \neq \varnothing$ olsun. E_n kümeleri ayrık olduğundan

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \sum_{n \in (E_1 \cup E_2 \cup \cdots)} a_n \\
&= \sum_{n \in E_1} a_n + \sum_{n \in E_2} a_n + \sum_{n \in E_3} a_n + \cdots \\
&= \mu(E_1) + \mu(E_2) + \mu(E_3) + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)
\end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla μ dönüşümü $P(\mathbb{N})$ üzerinde ölçü ve $(X, P(\mathbb{N}), \mu)$ ölçü uzayıdır.

Örnek: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi üzerinde, $n(E)$, E'nin eleman sayısını göstermek üzere;

$$\mu(A) = \begin{cases} n(E)\,; & E \text{ sonlu} \\ +\infty\,; & E \text{ sonsuz} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan μ dönüşümü ölçü müdür?

Çözüm: i) E boş küme ise $\mu(\varnothing) = n(\varnothing) = 0$ dır.

ii) Keyfi $E \in \mu(A)$ için $\mu(A) \geq 0$ dır.

iii) Her n için iki durum söz konusudur:

a) Her n için sonlu ise $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_n\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ olur.

b) E sonsuz ise $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ olduğu aşikardır.

Şu halde μ bir ölçü ve $(X, \mathbb{N}, \mu)$ ölçü uzayıdır. //

Bu ölçüye doğal sayılar üzerinde sayma ölçüsü adı verilir. Bu ölçü onlu olmayıp σ–sonludur. Çünkü $A_n = \{n\}$ alınırsa $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ olup her bir n için $\mu(A_n) = 1$ dir.

Örnek: X bir küme σ–cebiri U üzerinde tanımlı ve (μ_n) dizisi için her n için $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$ olsun. U üzerinde tanımlı $\mu_n(\emptyset) = 0$ ve
$\mu : A \to [0, \infty)$, $\mu(A) = \sup\{\mu_n(A)\}$
ile tanımlı μ fonksiyonu ölçü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) Tanımdan $\mu_n(\emptyset) = 0$ dır.

ii) Değer kümesi $[0, \infty)$ olduğundan $\mu(A) = \sup\{\mu_n(A)\} \geq 0$ dır.

iii) Verilen varsayımlardan $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonun monoton artan bir dizisi olduğu için $\sup\limits_{n} \mu_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$ dir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \qquad (1)$$

çıkar. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

olduğu açıktır. Buradan

$$\sup \mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sup \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

ve

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \tag{2}$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemlerinden

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

dir.

Şu halde μ bir ölçü ve (X, U, μ) ölçü uzayıdır.

Örnek: (X, U, μ) bir ölçü uzayı ve $A \in U$ sabitlenmiş bir küme olsun. Her $E \in U$ için

$$v(E) = \mu(E \backslash A)$$

olarak tanımlanan v dönüşümü U üzerinde ölçü müdür?

Çözüm: i) $v(\emptyset) = \mu(\emptyset \backslash A) = \mu(\emptyset) = 0$

ii) μ, U üzerinde bir ölçü olduğundan $v(E) = \mu(E \backslash A) \geq 0$ gerçeklenir.

iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için (E_n), U daki ayrık kümelerin bir dizisi olsun. Bu durumda $m \neq n$ olmak üzere

$$(E_n \backslash A) \cap (E_m \backslash A) = \emptyset$$

olup $(E_n \backslash A)$ dizisi U daki ayrık kümelerin bir dizisidir. Dolayısıyla μ dönüşümü U üzerinde ölçü olduğundan

$$v\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \backslash A\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \backslash A) = \sum_{n=1}^{\infty} v(E_n)$$

olur. Sonuç olarak v dönüşümü U kümesi üzerinde ölçüdür.

1.1. Teorem: (X, U, μ) bir ölçü, $A, B \in U$ olmak üzere

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A \cup B = \emptyset$ ise $\mu(A \cap B) = 0$ olup μ ölçü olduğundan

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

olur. $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ olduğu dikkate alınırsa

$$\mu(A \cup B) = \mu\big(A \cup (B \setminus A)\big) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \qquad (1)$$

yazılabilir. Ayrıca $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ olarak yazılabileceğinden

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \qquad (2)$$

olur. $\mu(A \cap B) < \infty$ ise (2) ifadesi (1) ifadesinde dikkate alındığında

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

elde edilir.

1.2. Teorem: (X, U, μ) bir ölçü uzayı olsun.

a) (A_n), U daki elemanların bir artan dizisi ise,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad (1)$$

dir.

b) (B_n), U daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \qquad (2)$$

dir.

İspat: Eğer bazı n'ler için $\mu(A_n) = +\infty$ ise (1) eşitliğinin her iki yanı $+\infty$ olur. Her n için $\mu(A_n) < +\infty$ olduğunu kabul edelim.

$S_1 \setminus A_1$ ve $n > 1$ için $S_2 = A_n \setminus A_{n-1}$

biçiminde tanımlanan (S_n) dizisi U'daki kümelerin bir ayrık dizisi olur. Ayrıca

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} S_k \text{ ve } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

yazılabilir. μ bir ölçü olduğundan

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(S_n) \\
&= \mu(S_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(S_n) \\
&= \mu(S_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) \\
&= \mu(S_1) + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) \\
&= \mu(S_1) + \lim_{m\to\infty} [\mu(A_m) - \mu(A_1)] \\
&= \lim_{m\to\infty} \mu(A_m)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

b) $T_n = B_1 \setminus B_n$ olsun. (T_n), U'daki elemanların bir artan dizisidir. Bu diziye teoremin (a) şıkkı uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) &= \lim_{n\to\infty} \mu(T_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(B_1) - \mu(B_n) \\
&= \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)
\end{aligned}
$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

olacağından

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$

yazılabilir. Bu değer yukarıda yerine yazılırsa,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

eşitliği elde edilir. (A_n) bir artan dizi olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ve (B_n) bir azalan dizi olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n=}^{\infty} B_n$$

elde edilir.

1.1. Sonuç: (X, U, μ) bir ölçü uzayı olsun.

a) (A_n), U daki elemanların bir artan dizisi ise,

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad (1)$$

dir.

b) (B_n), U daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$

$$\mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \qquad (2)$$

dir.

1.3. Teorem: (X, U, μ) bir ölçü uzayı olsun. (A_k), U'ya ait kümelerin herhangi bir dizisi ise

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

dir.

İspat: $B_1 = A_1$ ve $k > 1$ için $B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{r=1}^{k-1} A_r\right)$ alınırsa (B_k), U'daki kümelerin bir ayrık dizisi olur. $B_k \subset A_k$ olduğundan $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$ dır. Buna göre;

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

bulunur.

LEBESGUE ÖLÇÜSÜ

Henri Léon Lebesgue
28 Haziran 1875, Beauvais, Fransa - 26 Temmuz 1941, Paris, Fransa

$\mathbb{R}$'de ölçü, uzunluk kavramının genelleştirilmesi olduğundan $\mathbb{R}$'deki kümeleri iki sınıfa ayırabiliriz:

1. Uzunluğu belli olan kümeler sınıfıdır ki bunlar aralıklardır. Bu gruptaki kümelerin ölçüsünü kendi uzunluğuna eşit olduğundan klasik işlemler yapılabilmektedir

2. Aralıklar sınıfının dışındaki kümeler. Bu gruptaki kümelerin ölçüsünü aralıklar yardımıyla buluyoruz.

I, $\mathbb{R}$ de herhangi bir sınırlı aralık (yani I = [a; b], (a; b], [a; b) veya (a; b)) olmak üzere, I aralığının uzunluğu $\ell(\mathrm{I}) = \mathrm{b} - \mathrm{a}$ olarak tanımlanır.

Her nokta bir aralıktır ve uzunluğu sıfırdır. Gerçekten, [a; b] aralığında $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ seçersek aralık {a} noktasına denk gelir. Buna göre,

$$\ell(\{\mathrm{a}\}) = \ell([\mathrm{a},\mathrm{a}]) = \mathrm{a} - \mathrm{a} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla tek noktalı sonlu kümelerin de uzunluğu sıfırdır.

$\mathbb{R}$'de bir kümeyi aşikâr olmayan bir takım aralıklara bölmemiz her zaman mümkün olmayabiliyor. Bu nedenle bu kümeyi örten bir takım (hatta sayılabilir sayıda) aralıkların bir sistemini göz önüne alabiliriz.

1.2. Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ alt küme ve (I_n) aralıklar dizisi verilsin.

$$\lambda(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

sayısına A kümesinin Lebesgue ölçüsü veya Lebesgue dış ölçüsü denir.

Herhangi bir $A \subset \mathbb{R}$ için $\lambda(A) \geq 0$ dır. Bazı A alt kümeleri için, A'nın her örtülüşüne karşın $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$ serisi ıraksak olabileceğinden, $\lambda(A) = \infty$ olabilir.

$\lambda(A)$ kümesi 0 ile alttan sınırlıdır. Dolayısıyla, sözü edilen infimum daima mevcuttur. Gerçekten, eğer $r \in \lambda(A)$ ise $[r,+\infty) \subset \lambda(A)$ dır. Su halde $\lambda(A)$, $(x,+\infty)$ veya $[x,+\infty)$ aralığıdır. Dolayısıyla, $\lambda(A)$ nın infimumu sadece x gibi bir sayı olur.

Burada şu tespiti yapmakta gerekir. Bir kümenin ölçüsü ile Lebesgue ölçüsü aynı sayıyı verir. Bilinen klasik ölçüler uygulanamayan kümeler mevcuttur. Bu sebepten Lebesgue ölçüye ihtiyaç hissedilmiştir.

Örnek: Aşağıdaki kümelerin Lebesgue ölçülerini bulunuz.

a) $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{k+1} \leq x \leq \frac{1}{k}\right\}$

b) $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{a-1}{k} \leq x \leq \frac{a+1}{k}\right\}$

c) $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2^{k+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^{k+1}}\right\}$

d) $D = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \frac{1}{3^k}\right\}$

e) $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \frac{1}{3^k}\right\}$

f) $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - \frac{1}{k} \leq x \leq 1 + \frac{1}{k}\right\}$

g) $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 2 + \frac{1}{k} \leq x \leq 5 - \frac{1}{k}\right\}$

Çözüm:

a) $I_k = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{k+1} \leq x \leq \frac{1}{k}\right\}$

diyelim. I_k kümeleri Borel kümesi olduğundan Lebesgue ölçüsüne göre ölçülebilirdir. (I_k) ayrık kümelerin bir dizisi olduğundan

$$\lambda(A)=\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1$$

bulunur.

b) Her $k\in\mathbb{N}$ için $I_k=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{a-1}{k}\leq x\leq\frac{a+1}{k}\right\}$ olsun. Dikkat edilirse (I_k) kümelerin azalan dizisidir. Buna göre;

$$\lambda(B)=\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right)=\lim_{k\to\infty}\lambda(I_k)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a+1}{k}-\frac{a-1}{k+1}\right)=0$$

olur.

c) Her $k\in\mathbb{N}$ için $I_k=\left\{x\in\mathbb{R}:\ \frac{1}{2^{k+1}}\leq x\leq\frac{1}{2^{k+1}}\right\}$ olsun. (I_k) ayrık kümelerin bir dizisi olduğundan

$$\lambda(C)=\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\right)=\frac{1}{2}$$

bulunur.

d) Her $k\in\mathbb{N}$ için $I_k=\left\{x\in\mathbb{R}:\ 0\leq x\leq\frac{1}{3^k}\right\}$ olsun. (I_k) kümelerin azalan dizisidir. O halde;

$$\lambda(D)=\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right)=\lim_{k\to\infty}\lambda(I_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3^k}=0$$

olur.

e) Her $k\in\mathbb{N}$ için $I_k=\left\{x\in\mathbb{R}:\ 0\leq x\leq\frac{1}{3^k}\right\}$ olsun. (I_k) kümelerin azalan dizisi olup

$$\lambda(E)=\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)=\lambda\left(\left(0,\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{3}$$

elde edilir.

f) Her $k\in\mathbb{N}$ için $I_k=\left\{x\in\mathbb{R}:\ 1-\frac{1}{k}\leq x\leq 1+\frac{1}{k}\right\}$ olsun. (I_k) kümelerin azalan dizisidir. Buna göre

$$\lambda(F)=\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right)=\lim_{k\to\infty}\lambda(I_k)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)-\left(1-\frac{1}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{k}=0$$

olur.

g) Her $k\in\mathbb{N}$ için $I_k=\left\{x\in\mathbb{R}:\ 2+\frac{1}{k}\leq x\leq 5-\frac{1}{k}\right\}$ olsun. (I_k) kümelerin artan dizisidir. Bu durumda

$$\lambda(G)=\lambda\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right)=\lim_{k\to\infty}\lambda(I_k)=\lim_{k\to\infty}\left(5-\frac{1}{k}\right)-\left(2+\frac{1}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}3-\frac{2}{k}=3$$

olur.

1.4. Teorem: Bir aralığın Lebesgue ölçüsü, uzunluğuna eşittir.

İspat. Önce sonlu kapalı bir $[a, b]$ aralığının Lebesgue ölçüsünün boyuna yani b–a uzunluğuna eşit olduğunu göstereceğiz. Her pozitif ε sayısı için $[a,b]\subset(a-\varepsilon,b+\varepsilon)$ kapsaması sağlandığından dolayı,

$$\lambda[a,b]\leq\ \ell[a-\varepsilon,b+\varepsilon]=b-a+2\varepsilon$$

elde ederiz. Her bir ε pozitif sayısı için $\lambda[a,b]\leq b-a+2\varepsilon$ olduğundan dolayı $\lambda[a,b]\leq b-a$ buluruz. Şimdi bu durumda $\lambda[a,b]\geq b-a$ olduğunu göstermek gereklidir. Bu ise $[a, b]$ aralığını örten açık aralıkların sayılabilir herhangi bir sınıfı (I_n) olduğunda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)\geq b-a \qquad (1)$$

olduğunu göstermeye denktir. Heine-Borel teoreminden dolayı, $[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığını örten açık aralıkların her sınıfının $[a, b]$ aralığını örten sonlu bir alt sınıfı var olduğundan dolayı ve de sonlu alt sınıftaki uzunlukların toplamı orijinal sınıfın uzunluklarının toplamından büyük olamayacağından (1) deki eşitsizliği $[a, b]$ yi örten sonlu sınıflar için ispat etmek yeterlidir. $\cup I_n$ birleşim kümesi a'yı içerdiğinden, I_n lerden en az biri a'yı içerir. Bu aralık (a_1,b_1) olsun. $a_1<a<b_1$ dir. Eğer $b_1\leq b$ ise bu takdirde $b_1\in[a,b]$ ve $b_1\notin(a_1,b_1)$ olduğundan dolayı $b_1\in(a_2,b_2)$ dir. Yani, $a_2<b_1<b_2$ olacak şekilde (I_n) sınıfında bir (a_2,b_2) aralığı bulunmalıdır. Bu şekilde devam ederek, $a_i<b_{i-1}<b_i$ olacak şekilde (I_n) sınıfından

$$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_n,b_n)$$

aralıklar dizisini elde ederiz.

(I_n) sınıfı sonlu olduğundan yaptığımız işlem bir (a_k,b_k) aralığında bitmelidir. Ancak $b\in(a_k,b_k)$ olunca yani, $a_k<b<b_k$ olduğu zaman bu işlem biter. Böylece $a_i<b_{i-1}$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)\geq\sum_{i=1}^{n}\ell(a_i,b_i)$$
$$= (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \cdots + (b_1 - a_1)$$
$$\geq b_k - a_1$$

elde edilir. Ancak $b_k > b$ ve $a_1 < a$ olduğundan $b_k - a_k > b - a$ ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)\geq b-a$ elde ederiz. Bu da $\lambda[a,b] = b - a$ olduğunu gösterir.

Eğer I herhangi sonlu bir aralık ise bu takdirde verilen $\varepsilon > 0$ için $\ell(J)>\ell(I)-\varepsilon$ olacak şekilde $J\subseteq I$ özelliğine sahip bir kapalı J aralığı vardır. Buradan

$$\ell(I)-\varepsilon<\ell(J)=\lambda(J)\leq\lambda(I)=\ell(I)$$

bulunur. Böylece her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\ell(I)-\varepsilon\leq\lambda(I)=\ell(I)$$

ve dolayısıyla $\lambda(I)=\ell(I)$ olur.

Eğer I sonsuz bir aralık ise bu takdirde verilen herhangi bir Δ reel sayısı için $\ell(J) = \Delta$ özelliğine sahip kapalı bir $J\subseteq I$ aralığı vardır. Buradan $\lambda(I) \geq \lambda(J) = \Delta$ elde edilir. Her bir Δ için $\lambda(I) \geq \Delta$ olduğundan dolayı $\lambda(I) = \ell(J) = \infty$ bulunur.

1.5. Teorem: A sayılabilir bir küme ise $\lambda(A) = 0$ dır.

İspat: $\varepsilon > 0$ istenildiği kadar küçük bir sayı ve $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ olsun. $I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$ seçilirse $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ olur. Bu durumda

$$0\leq\lambda(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon$$

olur ki bu $\lambda(A) = 0$ olduğunu gösterir. //

1.2. Sonuç: Tek nokta kümeleri, Tek noktaları kümelerin birleşimi, Doğal sayılar, Tamsayılar, Rasyonel sayılar ve boş kümenın Lebesgue ölçüleri sıfırdır. Biz burada boş kümenin ve tek nokta kümesinin Lebesgue ölçüsünün sıfır olduğunu göstereceğiz.

Örnek: $\lambda(\emptyset) = 0$ dır.

Çözüm: $\varnothing \subset \left(0,\ \frac{1}{n}\right)$ olduğundan dolayı,

$$0 \le \lambda(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \le \left(0, \frac{1}{n}\right) = \inf\left(\frac{1}{n} - 0\right) = 0$$

olur dolayısıyla da $\lambda(\varnothing) = 0$ elde edilir.

Örnek: Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lambda(\{x\}) = 0$ dır. Yani tek nokta kümesinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır.

İspat: Herhangi bir x reel sayısı alalım ve $\{x\}$ tek nokta kümesini göz önüne alalım. Bu takdirde;

$$\begin{aligned}\lambda(A) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf \ell\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \\ &= \inf \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur.

1.3. Sonuç: [0, 1] aralığı sayılamaz. Çünkü bu aralığın uzunluğu 1'dir. Halbuki sayılabilir sonsuz kümeleri uzunluğu 0 olmalıdır.

1.4. Sonuç: $\mathbb{R}^3$ üzerindeki Lebesgue ölçüsü her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

1.6. Teorem: Her A için $\lambda(A) \ge 0$ dır.

İspat: İnfumumu alınan kümenin her elemanı pozitif veya sıfır olduğundan kümenin infumumu negatif olamaz. Şu halde her A için $\lambda(A) \ge 0$ dır.

1.7. Teorem: $A \subseteq B$ ise, $\lambda(A) \le \lambda(B)$ dır.

İspat: $A \subseteq B$ olsun. Bu takdirde;

$$\lambda(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \subseteq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = \lambda(B)$$

elde edilir ki bundan da $\lambda(A) \leq \lambda(B)$ bulunur.

1.8. Teorem (Sayılabilir Alt Toplamsallık Özelliği): Herhangi bir (A_n) kümeler dizisi için,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

dir.

İspat: (A_n), $\mathbb{R}$'de bir dizi olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = +\infty$ ise

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

olacağı açıktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, infumum özelliğinden, herbir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) < \lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (1)$$

olacak şekilde en az bir $(I_{n,k})$ dizisi vardır. $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ olduğundan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}\right)$$

yazılabilir. Lebesgue ölçüsünün tanımı ve (1) eşitliğinden

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) + \varepsilon$$

olur. ε keyfi olduğundan

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

elde edilir.

1.1. Not: Lebesgue ölçü, ölçü kavramının bütün özelliklerini sağlar. Çünkü 1.2. sonuçta sonraki örnek, 1.6. teorem ve 1.8. teoremleri ölçü tanımını vermektedir.

1.2. Not: Bazı kitaplarda 1.2. sonuçta sonraki örnek, 1.6. teorem, 1.7. teorem ve 1.8. teoremleri sağlanıyorsa dış ölçü olarak tanımlamaktalar. Buna göre Lebesgue ölçüsü aynı zamanda dış ölçüdr.

1.9. Teorem: Her $A \subseteq X$ ve her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda(A) = \lambda(A+t)$$

dir.

İspat: $A \subseteq X$ ve $t \in \mathbb{R}$ için $\lambda(A) = \lambda(A+t)$ olduğunu göterebilmek için A'nın açık aralıklarıdna yapılan bir $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ örtülüşü göz önüne alınsın. Bu durumda A'nın t noktası kadar öteleneşi $A + t \subseteq \{x + y : x \in A\}$ kümesinin bir örtülüşü;

$$A+t \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{I_n + t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

ailesi ile yapılır. $\ell(I_n) = \ell(J_n)$ olduğu açıktır. Buradan

$$\lambda(A+t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n + t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n)$$

ve böylece

$$\lambda(A+t) \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n + t) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = \lambda(A) \qquad (1)$$

olur. Benzer yolla $\lambda(A-t) \leq \lambda(A)$ bulunur. O halde (1) den

$$\lambda(A) \leq \lambda[(A+t) - t] \leq \lambda(A+t) \leq \lambda(A)$$

ve buradan

$$\lambda(A+t) = \lambda(A)$$

elde edilir.

BAZI ÖLÇÜLEBİLİRLİLİK TEOREMLERİ

1.3. Tanım: $A \subset X$ olsun. Eğer

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^t)$$

olacak şekilde $E \subset X$ kümesi varsa E kümesine ölçülebilir küme denir.

Constantin Carathéodory
13 Eylül 1873, Berlin, Almanya–02 Şubat 1950, Münih, Almanya

1.10. Teorem (Carathéodory Teoremi): Eğer A kümesi ölçülebilir ise

$$\lambda(A) \geq \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^t)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: $\lambda(A) = +\infty$ ise eşitsizliğin sağlanacağı açıktır. $\lambda(A) < +\infty$ ise istenen eşitsizliği sonlu Lebesgue ölçüme sahip olan A kümeleri için ispatlamak yeterlidir.

Ölçülebilirlik tanımı A ile A^t de simetrik olduğundan dolayı, E kümesi ölçülebilir olduğunda A^t kümesinin ölçülebilir olduğunu elde ederiz. Gerçekten;

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap E^t) + \lambda(A \cap (E^t)^t) = \lambda(A \cap E^t) + \lambda(A \cap E)$$

dir.

Boş küme ile bütün reel sayılar kümesi ölçülebilir olduğu açıkça görülmektedir. Gerçekten

$$\lambda(A) \geq \lambda(A \cap \varnothing) + \lambda\left(A \cap \varnothing^t\right) = \lambda(\varnothing) + \lambda(A \cap \mathbb{R}) = 0 + \lambda(A) = \lambda(A)$$

dır ve $\varnothing$ küme ölçülebilir olduğundan dolayı, ölçülebilir her kümenin tümleyeni de ölçülebilir olduğundan dolayı $\varnothing = \mathbb{R}$ kümesi ölçülebilirdir.

1.11. Teorem: $B \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart her $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için

$$\lambda(I) = \lambda(I \cap B) + \lambda(I \cap B^t)$$

dir.

İspat: $\Rightarrow$: $B \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. $A \subset \mathbb{R}$ herhangi bir kümesini alalım.

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^t)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cap B^t)$$

gerçeklenir. Özel olarak $A = I$ alınırsa

$$\lambda(I) = \lambda(I \cap B) + \lambda(I \cap B^t)$$

istenilen elde edilir.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki her $I \subset \mathbb{R}$ aralığı için

$$\lambda(I) = \lambda(I \cap B) + \lambda(I \cap B^t)$$

olsun. Şimdi 1.10. teoremi gerçeklediğini göstermeliyiz.

$\lambda(E) = \infty$ için eşitsizlik geçerlidir. $\lambda(E) < \infty$ olduğunu kabul edelim.

λ Lebesgue ölçüsünün tanımından ve infimum özelliğinden her $\varepsilon > 0$ için $\exists (I_n) = ((a_n, b_n))$ vardır öyle ki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \lambda(E) + \varepsilon \tag{1}$$

gerçeklenir. $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ olduğundan

$$E \cap B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [(a_n, b_n) \cap B] \text{ ve } E \cap B^t \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [(a_n, b_n) \cap B^t]$$

yazılabilir. λ Lebesgue ölçüsünün özelliğinden

$$\lambda(E \cap B) \le \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [(a_n, b_n) \cap B]\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda[(a_n, b_n) \cap B]$$

$$\lambda(E \cap B^t) \le \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [(a_n, b_n) \cap B^t]\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda[(a_n, b_n) \cap B^t]$$

eşitsizlikleri elde edilir. Hipotez ve (1) ifadesi kullanılırsa her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\lambda(E \cap B) + \lambda(E \cap B^t) &\le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda[(a_n, b_n) \cap B] + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda[(a_n, b_n) \cap B^t] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda[(a_n, b_n)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \ell[(a_n, b_n)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \\
&= \lambda(E) + \varepsilon
\end{aligned}$$

yazılabilir. Sol taraf ε'dan bağımsız olduğundan istenilen

$$\lambda(E) \geq \lambda(E \cap B) + \lambda(E \cap B^t)$$

elde edilir.

1.12. Teorem: Eğer $\lambda(A) = 0$ ise bu takdirde A kümesi ölçülebilirdir.

İspat: A herhangi bir küme olsun. Bu takdirde $A \cap E \subset E$ olur. Böylece $\lambda(A \cap E) \leq \lambda(E) = 0$ dır. Ayrıca her zaman $0 \leq \lambda(A \cap E)$ olduğundan $\lambda(A \cap E) = 0$ olur. Aynı zamanda $A \cap E^t \subset A$ olması sebebiyle;

$$\lambda(A) \geq \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^t)$$

olup 1.10. teoremi gerçeklenir, dolayısıyla A kümesi ölçülebilirdir.

1.5. Sonuç: $\lambda(E) = 0$ ise, her B için, $\lambda(A \cup E) = \lambda(A)$ dir.

1.13. Teorem: $|\lambda(A) - \lambda(B)| \leq \lambda(A \,\Delta\, B) = 0$ dir.

İspat: $A \subseteq (A \,\Delta\, B) \cup B$ yazılabilir. Ölçünün monotonluk ve sonlu alt toplamsallık özelliğinden

$$\lambda(A) \leq \lambda(A \,\Delta\, B) + \lambda(B) \text{ ve } \lambda(B) \leq \lambda(A \,\Delta\, B) + \lambda(A)$$

elde edilebilir. Buradan

$$|\lambda(A) - \lambda(B)| \leq \lambda(A \,\Delta\, B) = 0$$

sonucuna varılır.

1.7. Sonuç: Eğer $\lambda(A \,\Delta\, B) = 0$ ise, $\lambda(A) = \lambda(B)$dir.

1.14. Teorem: Eğer A ile B kümeleri ölçülebilirse $A \cup B$ kümesi de ölçülebilirdir.

İspat: E herhangi bir küme olsun. Ölçülebilir küme tanımında E yerine $A^t \cup E$ kümesini göz önüne alırsak ve B kümesinin ölçülebilir olduğunu kullanırsak,

$$\lambda(A^t \cap E) = \lambda(A^t \cap B \cap E) + \lambda(A^t \cap B^t \cap E)$$

dir ve

$$(A \cup B) \cap E = [A \cup (B \cap A^t)] \cap E = [A \cap E] \cup [B \cap A^t \cap E]$$

eşitliğisağlandığından dolayı,

$$\begin{aligned} \lambda([A \cup B] \cap E) &= \lambda([A \cap E] \cup [B \cap A^t \cap E]) \\ &\leq \lambda[A \cap E] + \lambda(B \cap A^t \cap E) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece B kümesi ölçülebilir olduğundan ölçülebilir küme tanımında E yerine $A^t \cap E$ kümesini düşünürsek,

$$\lambda(B \cap A^t \cap E) + \lambda(B^t \cap A^t \cap E) = \lambda(A^t \cap E)$$

olacaktır ve A kümesinin ölçülebilirliğinden,

$$\lambda(A \cap E) + \lambda(A^t \cap E) = \lambda(E)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\lambda([A \cup B] \cap E) + \lambda([A \cup B]^t \cap E) &= \lambda([A \cup B] \cap E) + \lambda(A^t \cap B^t \cap E)\\ &\leq \lambda(A \cap E) + \lambda(A^t \cap B \cap E) + \lambda(A^t \cap B^t \cap E)\\ &\leq \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap A^t)\\ &\leq \lambda(E)\end{aligned}$$

elde ederiz. $[A \cup B]^t = A^t \cap B^t$ olduğundan dolayı $A \cup B$ kümesinin ölçülebilir olduğu elde edilir.

1.8. Sonuç: Sayılabilir sayıda ölçülebilir reel sayı kümesinin birleşimi de ölçülebilirdir.

1.15. Teorem: A herhangi bir küme ve ölçülebilir kümelerin sonlu ayrık bir dizisi $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ olsun. Bu takdirde

$$\lambda\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A \cap E_k)$$

dir.

İspat: Teoremi tümevarımla ispat edeceğiz.

$n = 1$ için doğru olduğu açıkça görülmektedir.

$n - 1$ tane E_i kümeleri için doğru olduğunu kabul edelim. E_i kümeleri ayrık olduğundan

$$A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right] \cap E_n = A \cap E_n \text{ ve } A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right] \cap E_n^t = A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]$$

elde ederiz. Buradan $n - 1$ küme için sağlandığını kabul ettiğimizden ve E_n nin ölçülebilirliğinden dolayı

$$\lambda\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right) = \lambda(A \cap E_n) + \lambda\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]\right)$$

$$\lambda(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda(A \cap E_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(A \cap E_k)$$

bulunur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ birer ölçü ve $a_1, a_2, \cdots, a_n$ negatif olmayan reel sayı ise U kümesi üzerinde;

$$v(E) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k (E)$$

ile tanımlı v dönüşümü ölçü müdür?

Çözüm: i) $v(\emptyset) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k (\emptyset) = 0$

ii) $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ birer ölçü olduğundan $\forall$ E $\in$ U için $v(E) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k (E) \geq 0$ dır.

iii) (E_m), U daki ayrık kümelerin bir dizisi olsun $1 \leq k \leq n$ için μ_k dönüşümleri ölçü olduğundan

$$\begin{aligned} v\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_k \mu_k (E_m)\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k (E_m)\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} v(E_m) \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Dolayısıyla v dönüşümü ölçüdür.

2. X bir küme σ–cebiri U üzerinde tanımlı ve (μ_n) dizisi için her n için $\mu_n(x) = \frac{1}{2}$ olsun. U üzerinde tanımlı

$$\beta(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n (E)$$

dönüşümü ölçü müdür? Ayrıca $\beta(X)$ i bulunuz.

Çözüm: i) $\beta(\varnothing)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(\varnothing)=0$

ii) Keyfi $E\in U$ ve $n\in\mathbb{N}$ için $\mu_n(E)\geq 0$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(E)\geq 0$ gerçeklenir.

iii) (E_m), U'daki ayrık kümelerin dizisi olsun. (μ_n) ölçü dizisi olduğundan

$$
\begin{aligned}
\beta\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\sum_{m=1}^{\infty}\mu_n(E_m)\right)\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(E_m)\right)\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\beta(E_m)
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan $\mu_n(E_m)\leq\mu_n(X)=\frac{1}{2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ serisi yakınsak olduğundan serilerin yerleri değiştirilebilmiştir. O halde β dönüşümü U üzerinde bir ölçü olduğunu gösterir.

Sorunun ikinci kısmı ise;

$$
\beta(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_n(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=2
$$

olarak bulunur.

3. (X, U, μ) bir ölçü, $B\neq\varnothing$ ve $B\in U$ olmak üzere;

$$K=\{A\subset X : A=B\cap C, C\in U\}$$

olsun.

$$v(A)=\mu(A\cap B)$$

şeklinde tanımlı v dönüşümü K üzerinde ölçü müdür?

Çözüm: Verilere göre K kümesi X üzerinde σ–cebiridir.

i) $v(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = 0$ dır.

ii) Keyfi $A \in K$ için $v(A) = \mu(A \cap B) \geq 0$ sağlanır.

iii) (A_n) dizisi K daki ayrık kümelerin dizisi olsun. $(A_n \cap B)$ dizisini dikkate alalım. $m \neq n$ olmak üzere;

$$(A_n \cap B) \cap (A_m \cap B) = \emptyset$$

olduğu göz önüne alınırsa $(A_n \cap B)$, U daki ayrık kümelerin bir dizisidir. Ayrıca μ dönşümü U üzerinde ölçü olduğundan

$$\begin{aligned} v\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n) \end{aligned}$$

bulunur. O halde v dönüşümü K üzerinde ölçüdür.

4. (X, U, μ) bir ölçü uzayı olsun. Eğer $A, B \in U$ ve $A \subset B$ için $\mu(A) \leq \mu(B)$ ve $\mu(A) < \infty$ ise

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

dir.

İspat: $B = A \cup (B \backslash A)$ ve $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$ olduğundan

$$\mu(B) = \mu(\left(A \cup (B \backslash A)\right) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$$

yazılabilir. $\mu(B \backslash A) \geq 0$ olduğu gözönüne alınırsa $\mu(A) \leq \mu(B)$ yazılabilir.

Eğer $\mu(A) < \infty$ ise $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$ eşitliğinden

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$$

elde edilir. //

Bu örnekte $A \subset B$ olduğu unutulmamalı, $A \not\subset B$ içim geçerli değildir.

5. $E \subset [-1,1] \times [-1,1]$ ve I rasyonel sayılar kümesi olsun.

$$E = \left\{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1] : |\sin x| < \frac{1}{2}, \cos(x+y) \in I\right\}$$

kümesinin ölçüsünü bulunuz.

Çözüm: $E \subset \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \times [-1,1]$ olacağından

$$F = \left(\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \times [-1,1]\right) \setminus E$$

biçiminde tanımlanan F kümesi $x + y \in \arccos I$ doğrularına karşı gelen -1 eğimli aralıkların sayılabilir bir topluluğu $\lambda(F) = 0$ dır. Buradan $\lambda(E) = \frac{\pi}{3}$ bulunur.

6. $U = \{[a,b] : -\infty < a \leq b < \infty\}$ bir yarı halka ve $\mathbb{R}$'de, azalmayan, soldan sürekli bir fonksiyon f olsun.

$$\mu : U \to [0,\infty), \mu([a,b)) = f(a) - f(b)$$

ile tanımlı μ küme fonksiyonu bir ölçü olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $a < b$ için $[a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n)$, $m \neq n$ için $[a_n, b_n) \cap [a_m, b_m) = \emptyset$ olmak üzere $([a_n, b_n))$ dizisi tanımlanabilir. Her $a < x \leq b$ için

$$s_x = \sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)|$$

tanımlanırsa $[a_k, b_k) \subset [a,x)$ gerçekleyen $[a_k, b_k)$ aralıkları üzerinden tanımlanan s_x toplamın tanımı nedeniyle $-s_x = 0$ gerçeklenir. f, azalmayan bir fonksiyondur. Bu nedenle

$$s_x \leq f(x) - f(a)$$

dır ve

$$U = \{x \in (a,b] : s_x = f(x) - f(a)\}$$

bağıntısı doğrudur. f, soldan sürekli bir fonksiyondur. Bu nedenle $t \in U$,

$$s_t = f(t) - f(a)$$

dır. $t = b$ ise sayılabilir toplamsal olur. $a < t < b$ ise hiç değilse bir i indisi için $a_i \leq t \leq b_i$ gerçeklenir. $([a_n, b_n))$ dizisi ikişer ikişer aynı elemanlardan oluştuğundan $[a_k, b_k) \subseteq [a, b_i)$ kapsama bağıntısı doğru olmasıdır. Böylece $s_t = s_{ai}$ olur. Özel olarak $a_i \in U$ için

$$f(t) - f(a) = s_t - s_{ai} \leq f(ai) - f(a) \leq f(t) - f(a)$$

eşitsizlik takımı doğrudur. Yukarıda bağıntı $b_i \in U$ anlamındadır. Bu olamayacağına göre $t = b$ ve buradan

$$\mu([a,b)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu([a_n, b_n))$$

elde edilir.

7. $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x : 0 < x < \frac{1}{2^k} \right\}$ ve $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x : 0 < x < \frac{1}{2^k} \right\}$

kümeleri veriliyor. $\ell(A)$ ve $\ell(B)$ uzunluklarını bulunuz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n \supset I_{n+1}$ dir. $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ verilmiş. İkişer ikişer J_k $(n \in \mathbb{N})$ aralıkları

$$J_1 = I_1 \setminus I_2, J_2 = I_2 \setminus I_3, \cdots, J_n = I_n \setminus I_{n+1}, \cdots$$

ile verilsin. 1.2. teoremden,

$$\ell(A) = \mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(I_k) = 0$$

dır ve B, ayrık aralıkların birleşimi olarak;

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

yazılabilir. Yine 1.2. teoremden

$$\ell(B) = \mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(J_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \ell(J_k) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2}$$

olur.

8. (q_n), $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılarda bir dizi,

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right) \neq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Ölçünün sayılabilir alt toplamsallık özelliğine göre,

$$\lambda \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right) \right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

bulunur. O halde,

$$\lambda \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right) \right) \neq 0$$

$$\mathbb{R}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{1}{n^2},q_n+\frac{1}{n^2}\right)\neq 0$$

elde edilir.

9. X bir küme; λ dönüşümü bir Lebesgue ölçüsü olsun. $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ve $\lambda(B) = 0$ olduğunda

a) $\lambda(A \cap B) = 0$
b) $\lambda(A \cup B) = \lambda(A)$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) $A \cap B \subseteq B$ olduğundan $0 \leq \lambda(A \cap B) \leq \lambda(B) = 0$ olacağından $\lambda(A \cap B) = 0$ dir.

b) $A \subseteq A \cap B$ olduğundan $\lambda(A) \leq \lambda(A \cap B) \leq \lambda(A) + \eta(B) = \lambda(A)$ olacağından $\lambda(A \cup B) = \lambda(A)$ elde edilir.

10. Herbir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için $A \subset G$ ve $\lambda(A) = \lambda(G)$ olacak şekilde $G \subset \mathbb{R}$ kümesinin varlığını gösteriniz?

Çözüm: $G = A \cup B$ alalım. Eğer B sayılabilir bir küme ise $\lambda(B) = 0$ olacağından istenen durum gerçeklenir.

$A \subset A \cup B$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\lambda(A) \leq \lambda(A \cup B) \leq \lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A)$$

olur. Bu ifade aşağıda kullanırsa

$$\lambda(A) \leq \lambda(A \cup B) \leq \lambda(A)$$

elde edilir. O halde $\lambda(A) = \lambda(G)$ sağlanır.

11. λ Lebesgue ölçüsü olmak üzere, $A \subset \mathbb{R}$ kümesi λ ölçülebilir olsun.

$$A + x = \{a + x : a \in A\}$$

kümesi de λ ölçülebilirdir.

Çözüm: $A + x$ kümesinin λ ölçülebilir olması için 1.17. teorem gereği her $E \subset \mathbb{R}$ için

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap (A + x)) + \lambda(E \cap (A + x)^t)$$

olduğu gösterilmelidir. Hatırlatmak gerekirse

$$E \cap (A + x) = [(E - x) \cap A] + x \text{ ve } E \cap (A + x)^t = [(E - x) \cap A^t] + x$$

eşitlikleri gerçeklenir. Gerçekten bu eşitliklerden birincisini elde edelim:

$$\begin{aligned} y \in [E \cap (A + x)] &\Leftrightarrow y \in E \wedge y \in A + x \\ &\Leftrightarrow y \in E \wedge y - x \in A \\ &\Leftrightarrow y - x \in E - x \wedge y - x \in A \\ &\Leftrightarrow y - x \in [(E - x) \cap A] \\ &\Leftrightarrow y \in [(E - x) \cap A] + x \end{aligned}$$

bulunur. 1.9. teorem kullanılırsa

$$\lambda(E \cap (A + x)) = \lambda([(E - x) \cap A] + x) = \lambda([(E - x) \cap A])$$

ve

$$\lambda(E \cap (A + x)^t) = \lambda([(E - x) \cap A^t] + x) = \lambda([(E - x) \cap A^t])$$

elde edilir. Buradan A kümesinin Lebesgue ölçülebilir olması kullanılarak

$$\begin{aligned} \lambda\big(E \cap (A + x)\big) + \lambda(E \cap (A + x)^t) &= \lambda\big((E - x) \cap A\big) + (E - x) \cap A^t \\ &= \lambda(E - x) \\ &= \lambda(E) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Yani sonuç olarak $A + x$ kümesi λ ölçülebilirdir.

12. $\alpha > 0$ olmak üzere $A \subset \mathbb{R}$ için

$$\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

olsun. Bu durumda

$$\lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(I_n) = \left(\frac{1}{\alpha} J_n\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha A) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : \alpha A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\,,\quad (J_n) = ((c_n, d_n))\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} J_n\,,\quad (J_n) = ((c_n, d_n))\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(\alpha I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\,,\quad (I_n) = \left(\frac{1}{\alpha} J_n\right)\right\} \\ &= \alpha \cdot \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \alpha \cdot \lambda(A) \end{aligned}$$

elde edilir.

13. Cantor kümesinin ölçüsünü bulunuz.

Çözüm: Cantor kümesi;

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

olduğunu Kümeler Cebiri konusundan biliyoruz. Buna göre;

$$\lambda(C_1) = 1$$
$$\lambda(C_2) = 1 - \frac{1}{3}$$
$$\lambda(C_3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$$
$$\lambda(C_4) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27}$$
$$\ldots$$

olup

$$\lambda(C)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1-1=0$$

$$\lambda(C) = 0$$

bulunur. //

Bu örnekten şu sonucu çıkarabiliriz: Sayılamayan fakat ölçüsü sıfır olan kümeler vardır.

14. v Lebesgue ölçü olmak üzere, X, $\mathbb{R}$ kümesi v ölçülebilir olsun. Her $A \subseteq X$ alt kümesi ve X'de tanımlı her ölçülebilir, negatif değerler almayan f fonksiyonu için,

$$v(A)=\int_A f$$

ile tanımlımlansın. Öteleme altında değişip değişmeyen bir küme fonksiyonun olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: $t \in \mathbb{R}$ için

$$v(A+t)=\int_{A+t} f=\int_A f+\int_t f \neq \int_{A+t} f=v(A)$$

olur. Buna göre v küme fonksiyonu öteleme altında değişir. Buna göre Lebesgue ölçü tanımlanamaz.

15. Ölçülebilir kümelerin bir dizisi (E_i) olsun. Eğer E_n kümeleri ikişer ikişer ayrık ise, bu takdirde

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

dir.

İspat: Ölçülebilir ikişer ikişer ayrık kümelerin sonsuz bir dizisi (E_i) olsun. Bu takdirde

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\supseteq\bigcup_{k=1}^{n}E_k$$

dir ve böylece

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\geq\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda(E_k)$$

olur. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki ifade n'den bağımsız olduğundan dolayı,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\geq\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_k)$$

elde ederiz. Öteki yöndeki eşitsizlik sayılabilir alt toplamsallıktan elde edilir ve dolayısıyla

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$$

elde ederiz.

16. Ölçülebilir bir kümenin tümleyeni ölçülebilirdir ve ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimi (ve arakesiti) ölçülebilirdir.

Çözüm: Ölçülebilir kümelerin sınıfını $\mathcal{M}$ ile gösterirsek $\mathcal{M}$ bir σ-cebiridir. Bu ise ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir birleşimi olan bir E kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. 15. örnekten dolayı, böyle bir E kümesi ikişer ikişer ayrık ölçülebilir kümelerin bir dizisinin birleşimine eşit olmalıdır. A herhangi bir küme olsun ve $F_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$ olsun. Bu takdirde F_n ölçülebilirdir ve $F_n\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=E$ olduğundan, $E^t\subset F_n^t$ dir. Buradan $A\cap E^t\subset A\cap F_n^t$ ve dolayısıyla $\lambda(A\cap E^t)\subset\lambda(A\cap F_n^t)$ olduğundan,

$$\lambda(A)=\lambda(A\cap F_n)+\lambda(A\cap F_n^t)\geq\lambda(A\cap F_n)+\lambda(A\cap E^t)$$

1.15. teoremden dolayı,

$$\lambda(A\cap F_n)=\lambda\left(A\cap\left[\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right]\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda(A\cap E_k)$$

bulunur. Böylece

$$\lambda(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda(A \cap E_k) + \lambda(A \cap E^t)$$

olur. Bu eşitsizliğin sol tarafı n'den bağımsız olduğundan dolayı, λ'nın sayılabilir alt toplamsallığından dolayı,

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\geq \sum_{k=1}^{n} \lambda(A \cap E_k) + \lambda(A \cap E^t) \\ &\geq \left[\lambda\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \right] + \lambda(A \cap E^t) \\ &= \lambda(A \cap E) + \lambda(A \cap E^t) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde sayılabilir adetteki ölçülebilir kümenin birleşimi olan E kümesi ölçülebilirdir. Ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimi ölçülebilirdir. Ölçülebilir bir kümenin tümleyeni de ölçülebilir olduğundan dolayı, ölçülebilir kümelerin sayılabilir arakesiti de ölçülebilirdir.

17. (a, ∞) aralığı ölçülebilirdir.

Çözüm: A herhangi bir küme olsun.

$$A_1 = A \cap (a, +\infty), A_2 = A \cap (-\infty, a])$$

yazalım. Bu takdirde $\lambda(A) \geq \lambda(A_1) + \lambda(A_2)$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $\lambda(A) = \infty$ ise bu takdirde ispat edilecek bir şey yok. Eğer $\lambda(A) < \infty$ ise verilen $\varepsilon > 0$ için açık aralıkların A'yı örten ve $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \lambda(A) + \varepsilon$ olacak şekilde sayılabilir bir sınıfı vardır. $I'_n = I_n \cap (a, \infty)$ ve $I''_n = I_n \cap (-\infty, a]$ yazalım. Bu takdirde I'_n ve I''_n ler aralıklardır (ya da boş kümedir) ve

$$(I_n) = \ell(I'_n) + \ell(I''_n) = \lambda(I'_n) + \lambda(I''_n)$$

olur. $A_1 \subseteq \cup I'_n$ olduğundan,

$$\lambda(A_1) \leq \lambda(\cup I'_n) \leq \sum \lambda(I'_n)$$

ve $A_2 \subseteq \cup I''_n$ olduğundan dolayı,

$$\lambda(A_2) \leq \lambda(\cup I''_n) \leq \sum \lambda(I''_n)$$

elde ederiz. Böylece

$$\lambda(A_1) + \lambda(A_2) \leq \sum\big(\lambda(I'_n) + \lambda(I''_n)\big) \leq \sum \ell(I_n) \leq \lambda(A) + \varepsilon$$

elde edilir. ε rast gele bir pozitif sayı olduğundan dolayı, $\lambda(A_1) + \lambda(A_2) \leq \lambda(A)$ elde edilir.

18. Her Borel kümesi ölçülebilirdir. Özel olarak her bir açık küme ve her bir kapalı küme ölçülebilirdir.

Çözüm: Ölçülebilir kümelerin sınıfı bir σ-cebiri olduğundan dolayı ve $(-\infty,a)=(a,\infty)^t$ olduğundan her bir a için $(-\infty,a)$ kümesi ölçülebilirdir. $(-\infty,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-\infty,b-\frac{1}{n}\right)$ olduğundan dolayı $(-\infty,b)$ kümesinin ölçülebilir olduğunu elde ederiz. Buradan her açık aralık $(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,+\infty)$ şeklinde yazılabildiğinden ve ölçülebilir iki kümenin arakesiti de ölçülebilir olduğundan, her (a,b) açık aralığı ölçülebilirdir. Her bir açık küme açık aralıkların sayılabilir bir birleşimine eşit olduğundan ölçülebilirdir. Böylece $\mathcal{M}$ açık kümeleri içeren bir σ–cebiridir ve dolayısıyla Borel kümelerinin β sınıfını kapsar. Çünkü β Borel kümeleri sınıfı açık kümeleri içeren en küçük σ–cebiridir.

Bu örnekteki β sınıfının $(a,+\infty)$ şeklindeki bütün aralıkları içeren en küçük σ–cebiri olduğuolduğu gerçeğinden ve $\mathcal{M}$'nin $(a,+\infty)$ şeklindeki bütün aralıkları içeren σ–olduğu gerçeğiden de elde edilir.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Reel Analiz, Üniversite Yayınları, İstanbul, 2012.

2. Doç. Dr. Neşe DERNEK, Reel Analiz Çözümlü Problemler, Ankara, 2013.

3. Prof. Dr. Ertan İBİKLİ, Reel Analiz Ders Notları, Ankara Üniversitesi İnternet Ders Notları, 2020.

4. Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI, Reel Analiz Ders Notları, Maltepe Üniversitesi İnternet Ders Notları, 2019.

5. Prof. Dr. Tunç Mısırlıoğlu, Reel Analiz Ders Notları, İstanbul Kültür Üniversitesi İnternet Ders Notları, İstanbul, 2011.

6. Gerald A. Edgar, Ohio Üniversitesi, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Ölçü, Topoloji ve Fraktal Geometri, Nobel Yayınları, Ankara, 2006.

7. Doç. Dr. Sebahettin ŞEVGİN, Reel Analiz Ders Notları, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi İnternet Ders Notları, 2020.

8. Öğr. Gör. Fuat Ergezen, Reel Analiz Ders Notları, İstanbul Teknik Üniversitesi İnternet Ders Notları, 2020.