2. BÖLÜM
GAMA ve BETA FONKSİYONLARI

Bazı integrallerin çözülmesi, bazı diferansiyel denklemlerin çözülmesi ve bazı fizik soruların çözülmesinde kullanılan Gama ile Beta fonksiyonları üzerinde duracağız. Bu bölümde gama ile beta fonksiyonlarla çözülen integraller anlatılacak diğer derslerde ihtiyaca göre gama ve beta fonksiyonları kullanılabilir.

GAMA FONKSİYONU

2.1. Tanım: $\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ fonksiyonuna gama fonksiyonu denir.

2.1. Teorem: $\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ integralinin $n>0$ için yakınsak, $n\le 0$ için ıraksaktır.

İspat: Verilen integrali

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx=\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx \qquad (1)$$

şeklinde iki integralin toplamı şeklinde yazılabilir.

a) $n\ge 0$ ise (1) eşitliğinin sağındaki ilk integral belirli integraldir. Çünkü integral $[0,1]$ aralığında süreklidir. Sağdaki ikinci integral birinci tip çeşit bir genelleştirilmiş integral olup

$$\lim_{x\to\infty} x^2(x^{n-1}e^{-x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+1}}{e^x}=0$$

dir, $p=2>1$ olduğundan karşılaştırma testi limit formu gereği yakınsaktır.

b) $0<n<1$ ise (1) eşitliğinin sağındaki ilk integral ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-n}(x^{n-1}e^{-x})=1$$

olacağından bu integral karşılaştırma testi limit formu gereği yakınsaktır.

Burada $p=1-n<1$ ve $0<n<1$ için de;

$$\lim_{x\to 0^+} x^2(x^{n-1}e^{-x}) = 1$$

yakınsak olduğu ortaya çıkar ($p = 2 > 1$).

c) $n = 0$ için (1) eşitliği

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

biçimindedir.

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

olduğundan birinci integral ıraksaktır ($p = 1$). O halde $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ integrali $n = 0$ $n=0$ için ıraksaktır.

d) $n < 0$ olsun.

$$\lim_{x\to 0^+} x(x^{n-1}e^{-x}) = \infty$$

olacağından (1) eşitliğinin sağındaki ilk integral ıraksaktır ($p = 1$). Buna göre verilen integral ıraksaktır.

Bütün bu dört duruma göre;

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

integrali $n > 0$ için yakınsak, $n \le 0$ için ıraksaktır.

Örnek: $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x^2 = t$ değişken değiştirme yapılırsa $2x\,dx = dt$, $x = 0$ için $t = 0$ ve $x = \infty$ için $t = \infty$ olacağından

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx &= \int_0^\infty (x^2)^n\, e^{-x^2}\, x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^n\, e^{-t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{(n+1)-1}\, e^{-t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(n+1)\end{aligned}$$

olur.

Örnek: $\int_0^\infty x^4e^{-x^3}\,dx$ integralinin değerlerini bulunuz.

Çözüm: $x^3 = t$ değişken değiştirme yapılırsa $3x^2dx = dt$, $x = 0$ için $t = 0$ ve $x = \infty$ için $t = \infty$ olacağından

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^\infty t^{2/3}\,e^{-t}\,x\,dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2}{9}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$
bulunur.

Örnek: $\int_0^1 (\ln x)^{1/3}\,dx$ integralinin değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\ln x = -t$ değişken değiştirme yapılırsa $-\frac{1}{x}dx = dt$, $x = 0$ için $t = \infty$ ve $x = 1$ için $t = 0$ olacağından

$$\int_0^1 (\ln x)^{1/3}\,dx = \int_\infty^0 (-t)^{1/3}\,(-e^{-t})\,dx = -\int_0^\infty t^{\frac{1}{3}}\,e^{-t}\,dx = -\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$
bulunur.

Örnek: $\int_0^1 (-\ln x)^{n-1}\,dx$ integralinin sonu nedir?

Çözüm: a) $u = -\ln x$ değişken değiştirme yapılırsa $du = -\frac{1}{x}dx$ ise $e^{-u}\,du = dx$, $x = 0$ için $u = \infty$ ve $x = 1$ için $u = 0$ olacağından

$$\int_0^1 (-\ln x)^{n-1}\,dx = -\int_\infty^0 u^{n-1}e^{-u}\,du = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du = \Gamma(n)$$
bulunur.

2.2. Teorem: $n > 0$ için $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ dir.

İspat: $\Gamma(n+1)$ ya integraline kısmi integrasyon uygulayalım.

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^n e^{-x}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left\{(x^n)(-e^{-x})\Big|_0^t - \int_0^t (-e^{-x}).n.x^{n-1}dx\right\}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left\{-t^n e^{-t} + n\int_0^t x^{n-1}e^{-x}dx\right\}$$
$$= n\,\Gamma(n)$$

2.3. Teorem: $n = 1,2,3,\ldots$ için $\Gamma(n+1) = n!$ dir.

İspat: $\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}\,dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty}(1-e^{-x}) = 1$

olduğundan 2.2. Teoremden,

$n = 1$ için $\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1!$
$n = 2$ için $\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(1) = 2!$
$n = 3$ için $\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(2) = 3!$
...

bulunur. Şu halde $\Gamma(n+1) = n!$ olur.

Örnek: $\Gamma(6) = 5!$

Örnek: $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{\alpha+1}}\,dx$ integralinin değerlerini bulunuz.

Çözüm: $\ln x = t$ değişken değiştirme yapılırsa $\frac{1}{x}dx = dt$, $x = 1$ için $t = 0$ ve $x = \infty$ için $t = \infty$ olacağından

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{\alpha+1}}\,dx = \int_0^\infty t\,e^{-\alpha t}\,dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty u\,e^{-u}\,du = \frac{1}{\alpha^2}\Gamma(2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

bulunur.

Örnek: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Çözüm: Yukarıdaki bir örnekte $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma(n+1)$ olduğu gösterildi. Burada $n = -\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty x^{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1}e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \left(2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du\right)\left(2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv\right) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\,dx$$

yazılabilir. Burada $u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ kutupsal koordinat dönüşümü yaparsak

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty r\,e^{-r^2}\,dr\,d\theta$$

elde edilir. İç kısımdaki integralde $t = r^2$ değişken değiştirmesi yapılırsa $dt = 2r\,dr$ ve $r = 0$ için $t = 0$, $r = \infty$ için $t = \infty$ olacağından

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty \frac{1}{2}\,e^{-t}\,dt\,d\theta = 2\int\limits_0^{\pi/2}\lim\limits_{b\to\infty}(-e^{-t})\Big|_0^b\,d\theta = 2\int\limits_0^{\pi/2}d\theta = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

olur.

Örnek: $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ ve $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ i bulunuz.

Çözüm: 2.2. teoremine göre $\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)$ ve $\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n}$ olduğundan,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$$

elde edilir.

2.4. Teorem: $\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$ dir.

İspat: Bu teoremi tümevarım yöntemiyle ispatlayalım.

i) $n=\frac{1}{2}$ alınırsa

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}=\pi$$

eşitliği gerçekleşir.

ii) n için gerçekleşsin $n+1$ için de gerçekleşir mi ona bakalım.

2.2. teoreminde $\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)$ olduğu bilinmektedir. n yerine $-n$ yazılırsa $\Gamma(-n+1)=(-n)\,\Gamma(-n)$ olur. Buna göre

$$\Gamma(n+1)\,\Gamma(1-(n+1))=\frac{\pi}{\sin(n+1)\pi}$$

$$\Gamma(n+1)\,\Gamma(-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi\,\cos\pi+\cos n\pi\,\sin\pi}$$

$$n\,\Gamma(n)\,\frac{\Gamma(1-n)}{-n}=-\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$$
istenen elde edilir.

2.5. Teorem: $n=0,1,2,\ldots$ için

a) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}$

b) $\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^n 2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\sqrt{\pi}=\frac{(-1)^n 2^{2n}\,n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}$

dir.

İspat:

a)
$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)&=\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\\&=\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\\&=\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\left(n-\tfrac{5}{2}\right)\Gamma\left(n-\tfrac{5}{2}\right)\\&\ldots\\&=\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\left(n-\tfrac{5}{2}\right)\ldots\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\\&=\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}\\&=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

b benzer şekilde gösterilir.

2.1. Sonuç:

1. $\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
2. $\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right)=\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}{4^n}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$

Örnek: $\left(\frac{7}{2}\right)!$ i bulunuz.

Çözüm: $\left(\frac{7}{2}\right)!=\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\sqrt{\pi}=\frac{105}{8}\sqrt{\pi}$

2.6. Teorem: Her n, m için $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+m)}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}$ dir.

İspat: 2.2. teoremine göre $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$ olduğundan bu teorem $n, m > 0$ için aşikardır. Şimdi $n, m < 0$ olduğunu gösterelim. $\Gamma(n+1), n > -1$ için tanımlı olduğundan, bu formül yardımıyla $\Gamma(n), -1 < n < 0$ aralığında da tanımlanabilir. Yine

$$\Gamma(n+1) = \frac{\Gamma(n+2)}{n+1}, n > -1$$

olduğundan,

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+2)}{n+2}, n > 0$$

yazılır. $\Gamma(n+2), n > -2$ için tanımlıdır. Bu nedenle $\Gamma(n)$ fonksiyonu $-2 < n < 0, (n \neq -1)$ aralığında da tanımlanabilir. Bu şekilde devam edilerek,

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+m)}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}$$

şeklinde yazılır. Burada m bir pozitif tamsayıdır. $\Gamma(n)$ fonksiyonu $-m < n < 0$, $n \neq -1, (-1, \cdots, -m+1)$ aralığında da tanımlanır. Bu son durumdan görülür ki $n = 0, -1, -2, \cdots$ için $\Gamma(n)$ sonsuz olur.

Örnek: $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ i bulunuz.

Çözüm: $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+3)}{n(n+1)(n+2)}$

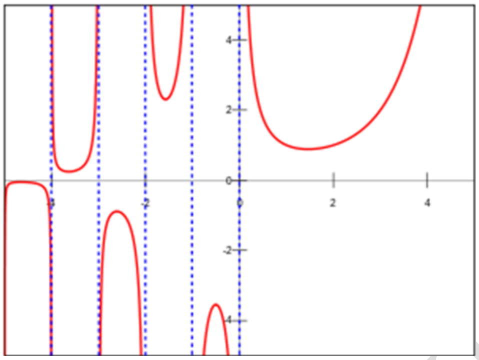
$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+3\right)}{\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}+1\right)\left(-\frac{5}{2}+2\right)} = -\frac{5}{2}\sqrt{\pi}$$

2.2. Sonuç: Gama fonksiyonu ile aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}7724538509055160272\cdots$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2{,}6789385347077476336\cdots$
3. $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3{,}6256099082219083119\cdots$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) = 4{,}5908437119988030532\cdots$
5. $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 5{,}5663160017802352043\cdots$
6. $\Gamma\left(\frac{1}{7}\right) = 6{,}5480629402478244377\cdots$
7. $\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) = 7{,}5339415987976119047\cdots$

GAMA FONKSİYONUN GRAFİĞİ

$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx$ gama fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekildedir.



n	Γ(n)		n	Γ(n)
1,0	1,0000		1,6	0,8935
1,1	0,9514		1,7	0,9086
1,2	0,9182		1,8	0,9314
1,3	0,8975		1,9	0,9618
1,4	0,8873		2,0	1,0000
1,5	0,8862			

LOGARİTMA GAMA FONKSİYONUNUN KONKAVLIĞI

2.7. Teorem: Logaritma gama fonksiyonu konkavdır (dışbükeydir).

İspat: $1 < p < \infty$ ve bunun eşleniği q olsun. $0 < x, y < \infty$ için Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1} e^{-t}\, dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{p}-\frac{t}{q}}\, dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{p}-\frac{t}{q}}\, dt \\
&= \int_0^\infty (t^{x-1} e^{-t})^{1/p}\, (t^{y-1} e^{-t})^{1/q}\, dt \\
&\le \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t}\, dt\right)^{1/q} \\
&= \Gamma(x)^{1/p}\, \Gamma(y)^{1/q}
\end{aligned}
$$

olur. Burada her iki tarafın logaritmasını alalım. Logaritma artan fonksiyon olup eşitsizliği koruduğundan

$$\ln\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \leq \ln[\Gamma(x)^{1/p}\,\Gamma(y)^{1/q}] = \frac{1}{p}\ln\Gamma(x)+\frac{1}{q}\ln\Gamma(y)$$

elde ederiz ki bu bize Γ fonksiyonun konkav (dışbükey) olduğunu gösterir.

BETA FONKSİYONU

2.2. Tanım: $\beta(m;n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ fonksiyonuna beta fonksiyonu denir.

2.7. Teorem: $\beta(m;n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ integralinin $m>0$ ve $n>0$ için yakınsak, diğer durumlarda ıraksaktır.

İspat: a) $m\geq 1$ ve $n\geq 1$ ise integral belirli integrale dönüşür, çünkü integral [0, 1] aralığında süreklidir.

b) $0<m<1$ ve $0<n<1$ ise

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx+\int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

eşitliğin sağındaki birinci integral yakınsaktır, çünkü,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-m}x^{m-1}(1-x)^{n-1}=1$$

olup $p=1-m<1$ dir. Benzer şekilde

$$\lim_{x\to 1^+}(1-x)^{-n+1}x^{m-1}(1-x)^{n-1}=1$$

olduğundan ikinci integral de yakınsaktır ($p=-n+1<1$).

Bu iki duruma göre $m>0$ ve $n>0$ için yakınsaktır.

c) $m\leq 0$ ise

$$\lim_{x\to 0^+} x.x^{m-1}(1-x)^{n-1}=\begin{cases} 1\ , & m=0\\ +\infty\ , & m=0\end{cases}$$

olacağından yukarıdaki eşitliğin sağındaki birinci integral her n için ıraksaktır. Benzer şekilde $n\leq 0$ ise için eşitliğin sağındaki ikinci integral her m için ıraksaktır. Dolayısıyla m ve n den en az birinin negatif olması durumunda $\beta(m,n)$ integrali ıraksaktır.

2.8. Teorem: $\beta(m;n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$ biçiminde tanımlanan bu beta fonksiyonunun;

a) $\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$

b) $\beta(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$

eşitlikleri de vardır.

İspat: a) β fonksiyonuna $x = \sin^2\theta$ değişken değiştirmesi uygulanınca $dx = \sin\theta\cos\theta\, d\theta$ ve $x = 0$ için $\theta = 0$, $x = 1$ için $\theta = \pi/2$ olacağından

$$\beta(m;n) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{m-1} (\cos^2\theta)^{n-1} d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$$

bulunur.

b) $u = \frac{x}{1+x}$ dönüşümü kullanırsa $x = \frac{u}{1+u}$, $dx = \frac{du}{(1+u)^2}$ ve $1 - x = \frac{1}{1+u}$ dir. Ayrıca $x = 0$ için $u = 0$, $x = 1$ için $u = \pm\infty$ olacağından
Buna göre

$$\beta(m;n) = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{n-1} \frac{du}{(1+u)^2}$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}} du$$

elde edilir.

2.9. Teorem: $\beta(m;n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ dir.

İspat: $\Gamma(n) = 2\int_0^{\infty} u^{2n-1} e^{-u^2} du$
olduğu yukarıdaki örnekte gösterilmişti. Buna göre,

$$\Gamma(m)\,\Gamma(n) = \left(2\int_0^{\infty} u^{2n-1} e^{-u^2} du\right)\left(2\int_0^{\infty} v^{2m-1} e^{-v^2} dv\right)$$
$$= 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} u^{2n-1} v^{2m-1} e^{-(u^2+v^2)} \, du\, dv \qquad (1)$$

elde edilir. 2.8. Teoremdeki eşitliği $\Gamma(m+n)$ ile çarparsak,

$$\beta(m;n)\Gamma(m+n) = 4\left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} \, dr\right)$$

$$= 4\left(\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, r^{2(m+n)-1} e^{-r^2} dr\, d\theta\right) \quad (2)$$

bulunur. (2) denkleminde $u = r\sin\theta$ ve $v = r\cos\theta$ dönüşümleri yaparsak

$$\beta(m;n)\Gamma(m+n) = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\left(\frac{u}{r}\right)^{2m-1}\left(\frac{v}{r}\right)^{2n-1} r^{2(m+n)-1}\cdot r\cdot e^{-(u^2+v^2)} dy\, dx$$
$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} u^{2m-1}v^{2n-1}e^{-(u^2+v^2)} dy\, dx \quad (3)$$

elde edilir. (1) ve (3) eşitliğinden

$$\beta(m;n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

olur.

Örnek: $\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: Beta fonksiyonun da $m = 5$ ve $n = 4$ alınırsa

$$\beta(5;\ 4) = \int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1}dx = \frac{\Gamma(5)\,\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} = \frac{4!\cdot 3!}{8!} = \frac{1}{56}$$

elde edilir.

Örnek: $\int_0^a x^4\sqrt{a-x}\, dx$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $x = at$ dönüşümü yapalım.

$$\int_0^a x^4\sqrt{a-x}\, dx = \int_0^1 (at)^4\sqrt{a-at}\; a\, dt$$
$$= a^{11/2}\int_0^1 t^4\sqrt{1-t}\, dt$$
$$= a^{11/2}\beta\left(5,\ \frac{3}{2}\right)$$
$$= a^{11/2}\frac{\Gamma(5)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}$$
$$= a^{11/2}\frac{4!\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)}$$
$$= a^{11/2}\frac{4!\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2^6}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$= a^{11/2}\frac{2^8}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5}$$

Örnek: $\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-1/2}dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm:
$$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-1/2}dx = \beta\left(n;\ \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{(n-1)!\,\sqrt{\pi}}{\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}\,n!}} = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{n(2n)!}$$

2.3. Sonuç: $\beta(n; 1-n) = \Gamma(n)\Gamma(1-n)$ dir.

Örnek: $\int_0^{\pi/6} \sqrt{\sin^{11}3\theta \cos^{9}3\theta}\, d\theta$ integralinin sonucunu bulunuz.

Çözüm: $t = 3\theta$ dönüşümü yapalım.

$$\int_0^{\pi/6} \sqrt{\sin^{11}3\theta \cos^{9}3\theta}\, d\theta = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot \int_0^{\pi/6}(\sin^{11/2}t \cos^{9/2}t)\, dt = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot \int_0^{\pi/2}(\sin^{11/2}t \cos^{9/2}t)\, dt = \frac{1}{6}\cdot \beta\left(\frac{13}{4};\frac{11}{4}\right) = \frac{1}{6}\cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^{10}\cdot 5!}\cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \quad (1)$$

bulunur. 2.4. ve 2.9. teoremlerine göre
$$\beta\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,\pi$$
olacağından, (1) eşitliği
$$\int_0^{\pi/6} \sqrt{\sin^{11}3\theta \cos^{9}3\theta}\, d\theta = \frac{1}{6}\cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^{10}\cdot 5!}\cdot \sqrt{2}\,\pi = \frac{21\sqrt{2}}{2^{14}}\,\pi$$
olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. $\int_0^{\infty} \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: $u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapalım. $du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ dır. İntegral sınırları $x=0$ ise $u=0$ ve $x=\infty$ ise $u=\infty$ olur.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sqrt[4]{x}\, e^{-\sqrt{x}}dx &= 2\int_0^\infty u^{1/2}\, e^{-u}\, u\, du\\ &= 2\int_0^\infty u^{3/2}\, e^{-u}\, du\\ &= 2\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\\ &= 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{3}{2}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

2. $\int_0^\infty 10^{-4x^2}dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: $\int_0^\infty 10^{-4x^2}dx=\int_0^\infty \left(e^{\ln 10}\right)^{-4x^2}dx=\int_0^\infty e^{-(4\ln 10)x^2}dx$ olur. Burada $u=(4\ln 10)x^2$ dönüşümü uygulanırsa $\sqrt{u}=\sqrt{4\ln 10}\ x$ yani $2^{-1}u^{-1/2}du=\sqrt{4\ln 10}\ dx$ ve integral sınırlarında değişiklik olmayacağından

$$\int_0^\infty e^{-(4\ln 10)x^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{4\ln 10}}\int_0^\infty e^{-u}u^{-1/2}du=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sqrt{\ln 10}}=\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 10}}$$

bulunur.

3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: $u=-\ln x$ dönüşümü yapalım. Burada $e^{-u}=x$ ve $-e^{-u}du=dx$ dir. İntegral sınırları $x=0$ ise $u=\infty$ ve $x=1$ ise $u=0$ olur.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}=\int_\infty^0\frac{-e^{-u}dx}{\sqrt{u}}=\int_0^\infty e^{-u}u^{-1/2}du=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

4. $\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: $\frac{1}{x}=e^t$ dönüşümü yapalım. Burada $-\frac{1}{x^2}dx=e^t\,dt$ yani $dx=-e^{-t}\,dt$ dir. İntegral sınırları $x=0$ ise $t=\infty$ ve $x=1$ ise $t=0$ olur.

$$\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{n-1} dx = -\int_\infty^0 (\ln e^t)^{n-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(n)$$

5. $\int_0^\infty e^{2nx-x^2} dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm:

$$\int_0^\infty e^{2nx-x^2} dx = \int_0^\infty e^{[2nx-x^2-n^2]+n^2} dx = \int_0^\infty e^{-(x-n)^2} e^{n^2} dx = e^{n^2}\int_0^\infty e^{-(x-n)^2} dx$$

bulunur. Burada $u = (x-n)^2$ dönüşümü yapalım. $du = 2(x-n)\,dx$ yani $\frac{1}{2\sqrt{u}}du = dx$ dır. İntegral sınırlarında değişiklik olmayacağından

$$\int_0^\infty e^{2nx-x^2} dx = e^{n^2}\int_0^\infty e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{u}} dx = \frac{e^{n^2}}{2}\int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} du = \frac{e^{n^2}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{n^2}$$

bulunur.

6. $\int_0^\infty e^{-ax} x^n\, dx$ integralinin sonucu nedir?

Çözüm: $u = ax$ dönüşümü yapalım. Burada $du = a\,dx$ dir. İntegral sınırları değişmeyeceğinden

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^n\, dx = \int_0^\infty e^{-u}\frac{u^n}{a^n}\frac{1}{a} du = \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty e^{-ax} u^n\, du = \frac{1}{a^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

elde edilir.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz II, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.
2. Ankara Üniversitesi, Açıkders programı, Uygulamalı Matematik dersleri ders notu, 2020.
3. Doç. Dr. İhsan DAĞ, Bayağı Diferansiyel Denklemler, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1983.
4. Prof. Dr. Hakkı Turgay KAPTANOĞLU, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İnternet Notları, 2020.
5. Yrd. Doç. Dr. Melek HAMZAOĞLU, Çözümlü Diferansiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi, Yayın No: 661, 2000, İstanbul.