6. BÖLÜM
FOURİER SERİLERİ

GİRİŞ

Fourier serisi kavramına geçmeden önce periyodik fonksiyon, ortogonal fonksiyon dizisi, ortonormal fonksiyon dizisi ve trigonometrik seri kavramlarını vereceğiz.

Periyodik Fonksiyonlar

6.1. Tanım (Periyodik Fonksiyon): $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun ve sıfırdan farklı sabit bir reel sayı k olsun. Eğer her $x \in E$ için

$$f(x) = f(x + k)$$

eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna periyodiktir denir, k'ya da f'in bir peryodu adı verilir.

6.1. Not: Bu bölümde çoğunlukla $E = \mathbb{R}$ olması durumu gözönüne alacak ve $E \subset \mathbb{R}, E \neq \mathbb{R}$ olması durumu olduğu zaman ayrıca belirtilecektir.

Örnek: Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ ile tanımlanan f fonksiyonu peryodiktir ve f'in peryodu 2π dir.

6.1. Sonuç: Eğer bir k sayısı f'in bir peryodu ise $-k$ sayısı da f'in bir peryodudur. Gerçekten k peryot olduğundan sıfırdan farklıdır dolayısıyla $-k \neq 0$ dır. Yine k peryot olduğundan $x - k \in \mathbb{R}$ için

$$f(x - k) = f((x - k) + k) = f(x)$$

olur. O halde $-k$ sayısı da f'in bir peryodudur.

6.2. Sonuç: Eğer k sayısı bir f fonksiyonun bir peryodu ise herbir $n \in \mathbb{N}$ için nk sayısının da f'in peryodudur. Gerçekten bu sonucu tümevarımla gösterelim. $n = 1$ için $1 \cdot k = k$ sayısı f için bir peryottur. Şimdi $n = m$ için $m \cdot k$ nın f'nin peryodu olduğunda $n = m + 1$ için $(m + 1)k$ nın da f'nin peryodu olduğunu gösterelim. $n = m$ için $m \cdot k$ sayısının f fonksiyonunun bir peryodu olduğunu kabul edelim. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(x+(m+1)k) &= f(x+mk+k) \\ &= f((x+mk)+k) \text{ (k peryot olduğundan)} \\ &= f(x+mk) \text{ (mk peryot olduğundan)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

bulunur. O halde $(m+1)k$ sayısı da peryot olur. Böylece tümevarım prensibinden dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için nk sayısı peryot olur.

6.3. Sonuç: Eğer k sayısı f fonksiyonunu bir peryodu ise her negatif m tamsayısı için mk sayısı da f fonksiyonunun bir peryodudur. Gerçekten; m negatif bir tamsayı ise $m = -n$ olacak sekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. nk sayısı f'in bir peryodu olur. $-nk$ da f'in peryodu olur. Dolayısıyla mk, f'in peryodu olur.

Örnek: Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 2$ şeklinde tanımlanan f sabit fonksiyonu peryodiktir. O halde her sabit $k \neq 0$ reel sayısı peryottur.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

olsun. Her rasyonel sıfırdan farklı sayı bu fonksiyonun peryodudur. Gerçekten iki rasyonel sayının toplamı rasyonel olacağından ve bir irrasyonel sayı ile rasyonel sayının toplamı irrasyonel olacağından, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x+q) = f(x)$ esitligi her $q \neq 0$ rasyonel sayısı için sağlanır. Şöyle ki;

$$f(x+q) = \begin{cases} 0, & x+q \in \mathbb{Q} \\ 1, & x+q \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ve

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

dir.

6.1. Teorem: Pozitif peryotları içinde bir minimuma sahip olan periyodik bir fonksiyon f olsun. Bu takdirde eğer $T = \min\{p: p > 0, p, f'\text{in peryodu}\}$ ise f'in her k peryodu için $k = nT$ olacak sekilde bir $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ vardır.

İspat. $T = \min\{p: p > 0, p, f'\text{in peryodu}\}$ olsun. f fonksiyonunun herhangi bir k peryodu verilsin. Bu takdirde

$$nT < k < (n+1)T$$

olacak sekilde bir $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ vardır. Buradan

$$0 < k - nT < T$$

elde edilir. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x+(k-nT)) = f((x+k)-nT) \text{ (-nT peryot olduğundan)}$$

$= f(x + k)$ (k peryot olduğundan)
$= f(x)$

bulunur. $k - nT$ sayısı ya peryottur ya da $k - nT = 0$ dır. $k - nT$ sayısı peryot olamaz. Çünkü T sayısından küçük pozitif peryot yoktur. O halde $k - nT = 0$ dır. Buradan $k = nT$ bulunur.

6.2. Teorem: f ile g aynı bir T peryoduna sahip iki peryodik fonksiyon olsun. Bu takdirde asagıdakiler sağlanır:

a) $f + g$ fonksiyonu T peryotlu bir peryodik fonksiyondur.

b) $\alpha \neq 0$ sabiti için αf fonksiyonu T peryotlu bir peryodik fonksiyondur.

c) $f \cdot g$ fonksiyonu T peryotlu bir peryodik fonksiyondur.

d) $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonu T peryotlu bir peryodik fonksiyondur.

e) $\alpha \neq 0$ için $f(\alpha x)$ fonksiyonu $\frac{T}{\alpha}$ peryotlu bir peryodik fonksiyondur.

İspat: (a), (b), (c) ve (d) nin ispatı periyodik fonksiyon tanımından görüleceğinden okuyucuya bırakılmıştır.

e) $\alpha \neq 0$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$h(x) = f(\alpha x)$$

yazalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$h\left(x + \frac{T}{\alpha}\right) = f\left(\alpha\left(x + \frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x + T) = f(\alpha x) = h(x)$$

dir. O halde $\frac{T}{\alpha}$ sayısı 0'dan farklı olduğundan h fonksiyonunun peryodudur. Özel olarak $\alpha = \frac{T}{2\alpha}$ alırsak $f\left(\frac{T}{2\alpha}x\right)$ fonksiyonu 2π peryotlu olur.

6.3. Teorem: [a,b] aralıgından $\mathbb{R}$ ye T peryotlu bir fonksiyon f olsun. Bu takdirde $(c, c + T)$ aralıgı [a,b] nin alt kümesi olacak sekildeki her c sayısı için

$$\int_c^{c+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

dir.

İspat: $\int_c^{c+T} f(x)\,dx = \int_c^{c+T} f(x)\,dx - \int_0^c f(x)\,dx$

$$=\int_0^T f(x)\,dx+\int_T^{c+T} f(x)\,dx-\int_0^c f(x)\,dx\,,\ (x=t+T, dx=dt)$$

$$=\int_0^T f(x)\,dx+\int_0^c f(x)\,dx-\int_0^c f(x)\,dx$$

$$=\int_0^T f(x)\,dx$$

Ortogonal Fonksiyon Dizileri

6.2. Tanım: Bir [a,b] aralığında Riemann integrallenebilir fonksiyonların bir $(f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ dizisi verilsin. Eğer her $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ için

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x)\,dx=0$$

oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisine [a,b] de ortogonaldir denir.

Örnek: $(1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx \ldots)$ fonksiyon dizisi $[-\pi,\pi]$ de ortogonal olduğunu gösterimiz.

Çözüm: $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]$ olduğundan, her $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)}{m-n}+\frac{\sin(m+n)}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=0$$

olur. O halde $(1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx \ldots)$ fonksiyon dizisi $[-\pi,\pi]$ de ortogonaldir.

Örnek: $(\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots)$ fonksiyon dizisi $[-\pi,\pi]$ de ortogonal olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$ olduğundan, her $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)}{m-n} - \frac{\sin(m+n)}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

bulunur.

Örnek: $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots)$ fonksiyon dizisi $[-\pi, \pi]$ de ortogonal olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) - \sin(a+b)]$ olduğundan, her $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$ için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m-n)x - \sin(m+n)x\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)}{m-n} + \frac{\cos(m+n)}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

bulunur.

Ortonormal Fonksiyon Dizileri

6.3. Tanım: Bir ortogonal (f_n) fonksiyon dizisi için eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_a^b (f_n(x))^2\, dx = 1$$

oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisine [a,b] de ortonormaldir denir.

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\int_a^b (f_n(x))^2\, dx = \alpha_n \neq 0$ özelligini sağlayan her (f_n) ortogonal fonksiyon dizisinden ortonormal bir $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} f_n\right)$ fonksiyon dizisi elde edilebilir.

Örnek: Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0, 2\pi]$ için

$$f_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad f_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

ve $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ şeklinde tanımlanan (f_n) fonksiyon dizisi $[0,2\pi]$ de ortonormaldir.

Trigonometrik Seriler

6.4.Tanım: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $b_n \in \mathbb{R}$ sayıları sabitler olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

şeklindeki bir seriye trigonometrik seri denir.

Bu trigonometrik seriyi şekilde ifade etmek mümkündür. $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}^+$ için $a_n = A_n \sin u_n$ ve $b_m = A_m \cos u_n$ yazalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= A_n \sin u_n \cos nx + A_n \cos u_n \sin nx \\ &= A_n(\sin u_n \cos nx + \cos u_n \sin nx) \\ &= A_n \sin(u_n + nx) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre bir trigonometrik seri $\frac{1}{2}A_0 u_0 + \sum_{n=0}^{n} A_n \sin(nx + u_n)$ şeklinde yazılabilir. Ancak biz (1) şeklindeki denklemi kullanacagız. (1) daki serinin $[-\pi,\pi]$ aralığında yakınsak olduğunu kabul edelim, ve her $x \in [-\pi,\pi]$ için

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

şeklinde bir f fonksiyonunu tanımlayalım. Bu f fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx + n2\pi) + b_n \sin(nx + n2\pi)\right] = f(x)$$

eşitliğini sağladığından 2π peryotlu peryodik bir fonksiyondur.

Şimdi $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos nx + b_n \sin nx\right]$ serisinin $[-\pi,\pi]$ de düzgün yakınsak olduğunun kabul edelim. Sınırlı bir fonksiyon ile düzgün yakınsak bir serinin terimlerinin çarpımı ile elde edilen seri de düzgün yakınsak olacağından,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

eşitliğinin her iki yanını cos nx ile çarparsak

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos kx \cos nx + b_k \sin kx \cos nx\right]$$

elde ederiz ve bu son esitligin sağ tarafı düzgün yakınsaktır. Düzgün yakınsak bir serinin terim terim integrali alındıgında integral değeri değişmeyecegin-den,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx\cos nx + b_k\sin kx\cos nx\right]dx$$

$$= a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx$$

$$= \frac{a_n}{2}\left[x+\frac{\sin 2nx}{2n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{a_n}{2}\left[\pi+\frac{\sin 2n\pi}{2n}-(-\pi)-\frac{\sin 2n(-\pi)}{2n}\right]$$

$$= a_n\pi$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

bulunur. Benzer sekilde (1) in her iki yanını sin nx ile çarpar ve terim terime integral alırsak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx$$

$$= \frac{b_n}{2}\left[\pi+\frac{\sin 2n\pi}{2n}-(-\pi)-\frac{\sin 2n(-\pi)}{2n}\right]$$

$$= b_n\pi$$

olur ki buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

elde edilir. (1) in her iki yanının integrali alınırsa

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0\pi}{2}-\frac{a_0(-\pi)}{2} = a_0\pi$$

olacağından

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

bulunur.

Jean Baptiste Joseph Fourier
21 Mart 1768, Auxerre, Fransa - 16 Mayıs 1830, Paris, Fransa

FOURİER SERİSİ KAVRAMI

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\; a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \text{ ve } b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

olmak üzere veya kısaca her $n\in\mathbb{N}$ için $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ ve her $n\in\mathbb{N}^+$ için $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ olmak üzere

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]$$

serisine f fonksiyonunun $[-\pi,\pi]$ aralığında Fourier serisi denir ve a_n ve b_m katsayılarına da f'in Fourier katsayıları adı verilir. Bu tanıma göre $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilen her f fonksiyonu için bir Fourier serisi elde edilebilir.

6.4. Teorem: Eğer $\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)$ trigonometrik serisi $[-\pi,\pi]$ aralığında bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaksa her $n\in\mathbb{N}$ için α_n ve her $n\in\mathbb{N}^+$ için β_n ler f'in Fourier katsayılarıdır ve bu seri f'in $[-\pi,\pi]$ de Fourier serisidir.

İspat: Her $x\in[-\pi,\pi]$ için

$$f(x)=\frac{1}{2}\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx) \qquad (2)$$

yazalım . (2) deki eşitliğin sağındaki serinin herbir terimi $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilir olduğundan düzgün yakınsadığı f fonksiyonu da integrallenebilirdir ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\alpha_0\int_{-\pi}^{\pi} dx+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx+\beta_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx)$$

$$=\frac{1}{2}\alpha_0 x\Big|_{-\pi}^{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cdot 0+\beta_n\cdot 0)$$
$$=\alpha_0\pi$$

dir dolayısıyla $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$ dir.

Düzgün yakınsak bir serinin terimleri sınırlı bir dizi ile çarpılırsa yine düzgün yakınsak bir seri elde edileceginden, (2) in her iki yanını cos nx sınırlı fonksiyonu ile çarparsak,

$$f(x)\cos nx=\frac{1}{2}\alpha_0\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx\cos nx+\beta_k\sin kx\cos nx)$$

bulunur. Bu son seri de integrallenebilir fonksiyonların düzgün yakınsak toplamı olduğundan $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilirdir ve dolayısıyla her iki yanın integrali alınırsa

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=a_n\pi$$

ve buradan $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ bulunur.

Benzer şekilde (2) in her iki yanını sınırlı sinnx fonksiyonu ile çarparsak toplamı f(x)sinnx olan düzgün yakınsak bir seri elde edilir, yani her bir sabit $n\in\mathbb{N}$ için

$$f(x)\sin nx=\frac{1}{2}\alpha_0\sin nx+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx\sin nx+\beta_k\sin kx\sin nx)$$

elde edilir ve bu eşitliğin her iki yanının $[-\pi,\pi]$ de integrali alınırsa,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha_0}{2}\sin nx+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kx\sin nx+\beta_k\sin kx\sin nx)\,dx$$
$$=\frac{\alpha_0}{2}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(\alpha_k\cos kx\sin nx+\beta_k\sin kx\sin nx)\,dx$$

bulunur. Buna göre

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

olur. α_n ve β_n lerin f'in Fourier serisinin katsayıları olduğu elde edilir dolayısıyla (2) in sagındaki seri f'in $[-\pi,\pi]$ deki Fourier serisidir.

6.5. Teorem: $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilen f ve g fonksiyonları bir $c \in [-\pi,\pi]$ noktasında sürekli olsunlar ve $f(c) \neq g(c)$ bulunsun. Bu takdirde f ile g nin $[-\pi,\pi]$ de Fourier serileri farklıdır.

İspat: Hipotezlerin saglandıgını fakat f ile g'nin Fourier serilerinin aynı olduğunu varsayalım. Şimdi her $x \in [-\pi,\pi]$ için

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

yazalım. $h(c) \neq 0$ dır diyelim ki $h(c) > 0$ dır. h fonksiyonunu her $x \in \mathbb{R}$ için

$$h(x+2\pi) = h(x)$$

yazarak $\mathbb{R}$ ye peryodik olarak genişletelim.

$$\Rightarrow: \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

şeklindeki her trigonometrik polinom için ve her $\eta \in \mathbb{R}$ için

$$\int_{\eta-\pi}^{\eta+\pi} h(x)t_m(x)\,dx = \int_{0}^{2\pi} h(x)t_m(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} h(x)t_m(x)\,dx = 0 \qquad (3)$$

olduğu $h(x)\cdot t_m(x)$ in 2π peryotlu bir fonksiyon olduğu gerçeginden ve 6.3. teoremden elde edilir. c noktasında sürekli olan iki fonksiyonun farkı da c'de sürekli olacağından h fonksiyonu c de süreklidir, dolayısıyla $h(c) > 0$ olmasından $c - h \leq x \leq c + h$ için $f(x) > k > 0$ olacak sekilde bir h ve bir $k > 0$ sayısı vardır. Şimdi

$$t_m(x) = (1 + \cos(x-c) - \cos h)^m$$

yazalım. $t_m(x)$ trigonometrik bir polinomdur ve

a) $c - h \leq x \leq c + h$ için $t_m(x) \geq 1$

b) $\left[c - \frac{1}{2}h, c + \frac{1}{2}h\right]$ aralıgında (t_m) düzgün olarak $+\infty$ gider

c) $c + h \leq x \leq c - h + 2\pi$ için $|t_m| \leq 1$

özelliklerini saglar. (a) ve (b) den

$$\int_{c-\pi}^{c+\pi} f(x)t_m(x)\,dx \geq \int_{c-\frac{1}{2}h}^{c+\frac{1}{2}h} f(x)t_m(x)\,dx$$

$$\geq \int_{c-\frac{1}{2}h}^{c+\frac{1}{2}h} k\cdot t_m(x)\,dx$$

$$\geq \int_{c-\frac{1}{2}h}^{c+\frac{1}{2}h} k\cdot \inf t_m(z)\,dx$$

$$=(k\cdot\inf t_m(z))x\Big|_{c-\frac{1}{2}h}^{c+\frac{1}{2}h}$$

$$=h\cdot k\cdot\inf t_m(z)$$

bulunur. $\inf t_m(x)\to+\infty$ ($m\to+\infty$ iken) olduğundan $m\to+\infty$ iken

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)t_m(x)\,dx$$

dır. (c) den dolayı

$$\int_{c-h}^{c+h+2\pi} f(x)t_m(x)\,dx$$

integrallerin dizisi m'e göre sınırlıdır. Dolayısıyla m yeteri kadar büyük alınırsa

$$\int_{c-h}^{c-h+2\pi} f(x)t_m(x)\,dx$$

sıfırdan farklı olur bu ise (3) ile çelisir.

6.4. Sonuç: Eğer f sürekli ise ve f 'in Fourier serisi düzgün yakınsaksa toplamı f 'dir.

Örnek: Her $x\in[-\pi,\pi]$ için $f(x)=x^2$ ile tanımlanan fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx,\ \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi)^3}{3}\right)=\frac{2\pi^2}{3}$$

Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx,\quad (u=x^2, v=\cos nx\,dx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}-2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx\,dx}{n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[(0-0)-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx\right]$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[\left.\frac{-x\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right]$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[\left.\frac{-x\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}+0\right]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}\left[\left.x\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[\pi\cos n\pi-(-\pi)\cos(-n\pi)]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[\pi(-1)^n+\pi\cos n\pi]$$

$$=-\frac{1}{n^2\pi}[\pi(-1)^n+\pi(-1)^n]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}2\pi(-1)^n$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

dir. $x^2\sin nx$ tek fonksiyon olduğunda $\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0$ bulunur. Böylece $f(x)=x^2$ nin $[-\pi,\pi]$ de Fourier serisi

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

olarak bulunur.

Ayrıca, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\right|\le\frac{1}{n^2}$ olduğundan ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sayı serisi yakınsak olduğundan $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$ fonksiyon serisi $[-\pi,\pi]$ de düzgün yakınsaktır. 6.4. Sonuçdan dolayı her $x\in[-\pi,\pi]$ için

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

eşitligi elde edilir. Özel olarak $x=\pi$ yazarsak,

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

elde edilir.

6.7. Teorem: $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilen bir f fonksiyonu verilsin. Bu takdirde

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos kx\,dx = 0 \ \text{ ve } \ \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx = 0$$

dır.

İspat: f 'in Fourier katsayıları her $k \in \mathbb{N}$ için $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ ve $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$ olmak üzere f 'in Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

dir. f 'in bu Fourier serisinin her $n \in \mathbb{N}$ için $n+1$ inci kısmi toplamı, $\forall\, x \in [-\pi,\pi]$ için

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right]$$

olsun. f ile s_n, $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilir olduğundan $f - s_n$ ve dolayısıyla $(f - s_n)^2$ de $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilirdir ve $(f - s_n)^2 \geq 0$ olmasından

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2\,dx \geq 0 \qquad (1)$$

dır. Buradan

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,s_n(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}[s_n(x)]^2\,dx \geq 0 \qquad (2)$$

elde edilir. Şimdi $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,s_n(x)\,dx$ integralini hesap edelim.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,s_n(x)\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right]dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0 f(x) + \sum_{k=1}^{n}(a_k f(x)\cos kx + b_k f(x)\sin kx)\,dx \\
&= \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n}(a_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx + b_k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}a_0a_0\pi+\sum_{k=1}^{n}(a_ka_k\pi+b_kb_k\pi)$$
$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^{\pi})\right] \qquad (3)$$

dir. Şimdi de $\int_{-\pi}^{\pi}[s_n(x)]^2\,dx$ integralini hesaplayalım.

$P_n(x)$, cos kx ile sin kx in çarpımlarının bir sabitle çarpımları ve cos kx ya da sin kx in birinin sabitle çarpımlarının toplamı olan bir polinom olmak üzere

$$(s_n(x))^2=\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2$$
$$=\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx)^2+(b_k\sin kx)^2+P_n(x)$$

ve

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi \text{ ve } \int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)\,dx=0$$

olacağından,

$$\int_{-\pi}^{\pi}(s_n(x))^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\frac{a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx)^2+(b_k\sin kx)^2+P_n(x)\right]dx$$
$$=\frac{a_0^2}{4}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2\pi+b_k^2\pi)+0$$
$$=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right] \qquad (4)$$

dir. (3) ve (4) deki değerler (2) de yerlerine konursa,

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx-2\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]+\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\geq 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\geq 0$$
$$\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]\leq\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx$$
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx \ \ (\text{Her } n\in\mathbb{N}) \qquad (5)$$

dir. Buna göre $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$ pozitif terimli serinin kısmi toplamlar dizisi sınırlı olur ki $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$ serisi yakınsak olur ve bu (5) eşitsizliğine **Bessel eşitsizliği** denir. Yakınsak bir serinin genel terimi 0 a yakınsayacagından

$$\lim_{k\to\infty} a_k^2+b_k^2=0$$

bulunur. Her $k\in\mathbb{N}$ için

$$0\le a_k^2\le a_k^2+b_k^2 \text{ ve } 0\le b_k^2\le a_k^2+b_k^2$$

eşitsizlikleri sağlandığından ve $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^2+b_k^2=0$ olduğundan $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^2=0$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} b_k^2=0$ bulunur. Dolayısıyla $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$ olur.

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos kx\,dx=\lim_{k\to\infty}\pi a_k=\pi\lim_{k\to\infty} a_k=\pi\cdot 0=0$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin kx\,dx=\lim_{k\to\infty}\pi b_k=\pi\lim_{k\to\infty} b_k=\pi\cdot 0=0$$

elde edilir.

6.5. Sonuç: f fonksiyonu [a,b] aralığında integrallenebilirse

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cdot\cos nx\,dx=0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cdot\sin nx\,dx=0$$

dır.

İspat: $2k_0\pi\le a<b<2(k_0+1)\pi$ olacak sekilde bir $k_0\in\mathbb{Z}$ in var olduğunu kabul edelim, yani aralığın boyu 2π den küçük ve $[2k_0\pi, 2(k_0+1)\pi]$ aralığı içinde kalsın. Bu durumda

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & a\le x\le b \\ 0, & [2k_0\pi,2(k_0+1)\pi]\backslash[a,b]\end{cases}$$

şeklinde bir g fonksiyonu tanımlarsak ve g'yi peryodik olarak her $x\in\mathbb{R}$ için $g(x+2\pi)=g(x)$ olacak sekilde bütün $\mathbb{R}$ ye genişletirsek g'nin Fourier katsayıları

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx \text{ ve } b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\,dx$$

eşitliklerini sağlar. Gerçekten, g peryodik olduğundan, her k için

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{(2k+1)\pi-\pi}^{(2k+1)\pi+\pi} g(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{2k}^{(2k+1)\pi+\pi} g(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b} g(x)\cos nx\,dx$$

olduğundan

$$\int_{a}^{b} f(x)\cos kx\,dx=\pi a_k$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\int_{a}^{b} f(x)\sin kx\,dx=\pi b_k$$

bulunur. Dolayısıyla 6.7. teoremden $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=0$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cdot\cos nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\pi a_n=\pi\lim_{n\to\infty}a_n=\pi\cdot 0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cdot\cos nx\,dx=0$$

elde edilir ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cdot\sin nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\pi b_n=\pi\lim_{n\to\infty}b_n=\pi\cdot 0=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\cdot\sin nx\,dx=0$$

bulunur.

[a, b] aralığının uzunluğu 2'den büyük olması durumunda [a, b] aralığı sonlu sayıda boyu 2'den küçük aralıklara bölünür ve sonlu adette toplamın limitinin limitler toplamına eşit olduğu gerçeğinden istenen elde edilir.

6.9. Teorem (Parseval Özdeşligi): Bir f fonksiyonunun Fourier serisi düzgün olarak f fonksiyonuna yakınsaksa a_k ve b_k ler f 'in Fourier katsayıları olmak üzere

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

dir. [Bu Parseval özdesligi f in integrallenebilir olması halinde yani f ’in Fourier serisi yakınsak olsun olmasın sağlanır].

İspat: f ’in Fourier serisi düzgün olarak f ’e yakınsak olsun. Bu takdirde her $x \in [-\pi,\pi]$ için

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

dir. Düzgün yakınsak bir serinin terimleri sınırlı bir fonksiyonla çarpıldıgında elde edilen yeni seri de düzgün yakınsak olacağından f ’in Fourier serisinin terimlerini integrallenebilen dolayısıyla sınırlı olan f fonksiyonu ile çarparsak elde edilen seri f^2 ye düzgün olarak yakınsak olacaktır ve her $x \in [-\pi,\pi]$ için

$$[f(x)]^2=\frac{1}{2}a_0f(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\, f(x)\cos kx+b_k\, f(x)\sin kx)$$

dir. Düzgün yakınsak bir serinin terim terim integrali alınabileceginden,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\, f(x)\cos kx+b_k\, f(x)\sin kx)\right\}dx\\&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx)\\&=\frac{a_0}{2}a_0\pi+\sum_{k=1}^{\infty}(a_ka_k\pi+b_kb_k\pi)\\&=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right]\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$$

olur.

6.10. Teorem: Her $n \in \mathbb{N}$ için ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$F_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

olsun. Bu takdirde her $p \in \mathbb{Z}$ için $x \neq 2p\pi$ olduğunda

$$F_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

dir ve $x = 2p\pi$ için

$$F_n(2p\pi) = n + \frac{1}{2}$$

dir, ayrıca

$$\int_0^{\pi} F_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} F_n(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

dir.

İspat: $F_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ eşitliğinin her iki yanını $2\sin\frac{x}{2}$ ile çarparsak,

$$2\sin\frac{x}{2}F_n(x) = \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \sin\frac{x}{2}$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x \text{, (Dönüşüm for.)}$$

$$= \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

olduğundan

$$F_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, \qquad (x \neq 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z})$$

bulunur. $x = 2p\pi$ için

$$F_n(2p\pi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k2p\pi = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1 = n + \frac{1}{2}$$

bulunur. Son olarak

$$\int_0^{\pi} F_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{x}$$

$$= \frac{1}{2}(\pi - 0) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sin k\pi}{k} - \frac{\sin 0}{k}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

bulunur.

6.11. Teorem: f fonksiyonunun Fourier katsayıları a_k ve b_k lar ise $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$ sayı serileri yakınsaktır.

İspat: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $(x-y)^2 \geq 0$ dan $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ ve bundan da $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ve dolayısıyla

$$|x||y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad (1)$$

elde edilir. (1) eşitsizliğinde x yerine a_n ve y yerine $\frac{1}{2}$ yazılırsa,

$$|a_n|\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

eşitsizliği bulunur. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ serisi Bessel eşitsizliğinden dolayı yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi de yakınsak olduğundan yakınsak iki serinin toplamı olan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ serisi de yakınsaktır. Karşılaştırma kriterinden $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ serisi yakınsak ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ serisi mutlak yakınsak olur. Mutlak yakınsak her seri yakınsak olacağından $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ serisi yakınsak olur. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ in yakınsaklıgı benzer şekilde elde edilir.

PARÇALI SÜREKLİ ve TÜREV

6.5. Tanım (Parçalı Süreklilik): f fonksiyonu [a,b] nin sonlu adette noktası hariç diger noktalarda sürekli ve ayrıca tanımsız ya da süreksiz olduğu sonlu adetteki noktalarda sağ ve sol limitler mevcutsa f fonksiyonuna [a,b] de parçalı süreklidir denir. [Burada a'da sağdan limitin ve b'de de sadece soldan limitin varlığı istenmektedir].

Örnek: $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$
şeklinde tanımlanan f fonksiyonu [0,2] de parçalı süreklidir.

Örnek: $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu 0 noktasını içeren hiçbir aralıkta parçalı sürekli değildir.

6.6. Tanım (Parçalı Sürekli Fonksiyonlar İçin Sağ ve Sol Türevler): f fonksiyonu [a,b] de parçalı sürekli olsun ve bir $x \in [a,b)$ verilsin. Eğer $\lim\limits_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$ limiti mevcutsa bu limite f fonksiyonunun x_0 noktasında sağ türevi denir ve $f'(x_0+0)$ ile gösterilir. Eğer $x_0 \in (a,b]$ için $\lim\limits_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0}$ limiti varsa bu limite f fonksiyonunun x_0 noktasında sol türevi denir ve $f'(x_0-0)$ ile gösterilir. Buna göre $f(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ olmak üzere

$$f'(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$$

ve $f(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ olmak üzere

$$f'(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}$$

dır.

6.12. Teorem: f fonksiyonu [a,b] de parçalı sürekli ve f 'in türevi f′ de [a,b] de parçalı sürekli olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun a noktasında sağdan türevi, b noktasında soldan türevi mevcuttur ve (a, b) nin her noktasında da hem sağ hem de sol türevi vardır.

İspat: Herhangi bir $x_0 \in [a,b)$ alalım. f 'in x_0 noktasında sağdan türevinin varolduğunu ispatlamalıyız. f ve f′-nün ikisi de [a,b] de parçalı sürekli olduğundan hem f hem de f′, [a, b] nin sonlu adette noktaları dışında tanımlı ve süreklidir ve dolayısıyla hem f 'in hem de f′-nin $(x_0, x_1)]$ açık aralığında sürekli olacağı şekilde x_0 dan büyük bir x_1 sayısı vardır. Herhangi bir $x_1 \in (x_0, x_1]$ alalım. f fonksiyonu (x_0, x) de süreklidir. Her $t \in (x_0, x]$ için $(x_0, x]$ de f ile aynı ve x_0 da $f(x_0+0)$ olarak tanımlayacağımız g fonksiyonunu yani

$$g(+) = \begin{cases} f(t), & t \in (x_0, x] \\ f(x_0+x), & t = x_0 \end{cases}$$

ile tanımlayalım. g fonksiyonu $[x_0, x]$ de sürekli ve (x_0, x) de türevlenebilir olur. Diferensiyel hesabın ortalama değer teoreminden

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(\xi)$$

olacak şekilde bir $\xi \in (x_0, x)$ vardır. $g(x) = f(x), g(x_0) = f(x_0 + 0)$ ve $g'(\xi) = f'(\xi)$ olduğundan

$$\frac{g(x)-f(x_0+0)}{x-x_0} = f'(\xi)$$

elde edilir. $x_0 < \xi < x$ olduğundan $x \to x_0$ iken $\xi \to x_0$ olacağından ve f', (x_0, x) de sürekli olduğundan, $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \lim\limits_{\xi\to x_0} f'(\xi) = f'(x_0+0)$ olacak dolayısıyla $\dfrac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0} = f'(x_0 + 0)$ eşitligi elde edilecektir. O halde f 'in her bir $x_0 \in [a, b)$ noktasında sağdan türevi vardır. Benzer şekilde her bir $x_0 \in (a, b]$ noktasında f 'in soldan türevinin var olduğu gösterilebilir.

FOURİER SERİLERİNDE İNTEGRAL

Parçalı sürekli bir fonksiyon parçalı sürekli olduğu aralıkta Riemann integrallenebilirdir. Bu gerçegi bundan sonraki incelememizde kullanacagız.

6.13. Teorem: f fonksiyonu 2π peryotlu peryodik bir fonksiyon ve f ile türevi f′, $[-\pi, \pi]$ kapalı aralığında parçalı sürekli ise f 'in Fourier serisi her bir x_0 için

$$\frac{f(x_0-0)-f(x_0+0)}{2}$$

sayısına yakınsar yani a_k ve b_k lar f 'in Fourier katsayıları olmak üzere

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)=\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$$

dir.

İspat: f 'in Fourier katsayıları a_k ve b_k lar ve Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)$$

olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve x_0 sabiti için

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0) \qquad (1)$$

yazalım. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)=\dfrac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$ olduğunu gösterelim. (1) da a_k ve b_k katsayılarını yerlerine yazarsak,

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\right)\cos kx_0\,dx+\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\right)\sin kx_0\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)[\cos kx\cos kx_0+\sin kx\sin kx_0]\,dx\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos k(x-x_0)\,dx\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right]f(x)\,dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right]dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,F_n(x-x_0)\,dx\right\}$$

$$=\frac{d}{\pi}\left\{\int_{-x_0-\pi}^{-x+\pi}f(x_0+u)\,F_n(u)\,du\right\}$$

$$=\frac{d}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+u)\,F_n(u)\,du\right\}$$

$$=\frac{d}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+x)\,F_n(x)\,dx\right\}$$

bulunur. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\displaystyle\int_{0}^{\pi}F_n(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$ ve $\displaystyle\int_{-\pi}^{0}F_n(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$ olduğundan,

$$S_n(x_0)-\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+x)\,F_n(x)\,dx-\frac{1}{2}f(x_0-0)-\frac{1}{2}f(x_0+0)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x_0+x)\,F_n(x)\,dx-\frac{1}{2}f(x_0-0)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x_0+x)\,F_n(x)\,dx-\frac{1}{2}f(x_0+0)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x_0+x)\,F_n(x)\,dx-\frac{1}{\pi}f(x_0-0)\int_{-\pi}^{0}F_n(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x_0+x)\,F_n(x)\,dx$$
$$-\frac{1}{\pi}f(x_0+0)\int_{0}^{\pi}F_n(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x_0+x)\,F_n(x)\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x_0-0)F_n(x)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x_0+x)\,F_n(x)\,dx$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x_0+0)F_n(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x_0+x)-f(x_0-0)]F_n(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0+x)-f(x_0+0)]F_n(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x_0+x)-f(x_0-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0+x)-f(x_0+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x_0+x)-f(x_0-0)]\left[\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\sin nx+\frac{\cos nx}{2}\right]dx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0+x)-f(x_0+0)]\left[\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\sin nx+\frac{\cos nx}{2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{x}\left[\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin nx\right]dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{2}\cos nx\,dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{x}\left[\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\sin nx\right]dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{2}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{x}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos x\cdot\sin nx\,dx+\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{2}\cos nx\,dx\right\}$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{\pi}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{x}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos x\cdot\sin nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{x}\cos nx\,dx\right\}$$

$$\varnothing_1(x)=\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{x}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos x,\quad \varnothing_2(x)=\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{2}$$

$$\varnothing_3(x)=\frac{f(x_0+x)-f(x_0+0)}{x}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos x,\quad \varnothing_4(x)=\frac{f(x_0+x)-f(x_0-0)}{2}$$

dersek $\varnothing_1, \varnothing_2, \varnothing_3$ ve $\varnothing_4$ fonksiyonları sırasıyla $[-\pi,0], [-\pi,0], [0,\pi]$ ve $[0,\pi]$ aralıklarında parçalı sürekli dolayısıyla integrallenebilirlerdir dolayısıyla 6.5. Sonuçdan dolayı

$$\int_{-\pi}^{0} \varnothing_1(x)\sin nx\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{0} \varnothing_2(x)\cos nx\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{\pi} \varnothing_3(x)\sin nx\,dx = 0, \quad \int_{0}^{\pi} \varnothing_4(x)\cos nx\,dx = 0$$

olur ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \varnothing_1(x)\sin nx\,dx + \int_{-\pi}^{0} \varnothing_2(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} \varnothing_3(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} \varnothing_4(x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= 0$$

olur ve böylece $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{S_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]\right\} = 0$ ve dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$$

elde edilir, bu da f in Fourier serisinin x_0 noktasında $\frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$ sayısına yakınsaması yani

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0) = \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$$

olması demektir.

6.14. Teorem: f ve türevi f', $[-\pi,\pi]$ de parçalı sürekli ise f 'in Fourier serisi her bir $x_0 \in (-\pi,\pi)$ için $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ sayısına yakınsar ve $x_0 = \pm\pi$ için $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$ sayısına yakınsar yani $x_0 \in (-\pi,\pi)$ için

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0) = \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)]$$

dir ve

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(-1)^k = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

dir.

İspat: f fonksiyonunun tanımlı olduğu her bir $x \in [-\pi,\pi)$ için $g(x) = f(x + 2k\pi)$ şeklinde f fonksiyonu 2π peryotla peryodik olarak $\mathbb{R}$ ye bir g fonksiyonuna genişletelim. 6.13. teoremden dolayı her x_0 için

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\pi + b_k \sin k\pi) = \frac{g(x_0-0)+g(x_0+0)}{2}$$

dir, burada a_k ve b_k g'nin Fourier katsayılarıdır ve f 'nin Fourier katsayıları ile aynıdır. Dolayısıyla f 'in Fourier serisi her $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = \frac{g(x_0-0)+g(x_0+0)}{2}$$

eşitligini sağlar. Her $x_0 \in (-\pi,\pi)$ için $g(x_0 - 0) = f(x_0 - 0)$ ve $g(x_0 + 0) = f(x_0 + 0)$ olduğundan $x_0 \in (-\pi,\pi)$ için

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

dir. $x_0 = \pi$ olsun. $g(\pi + 0) = g(\pi - 2\pi + 0) = g(-\pi + 0) = f(-\pi + 0)$ olduğu g'nin peryodikliğinden elde edildiğinden

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

dir. Benzer sekilde $x_0 = -\pi$ için $g(-\pi - 0) = g(-\pi + 2\pi - 0) = g(\pi - 0) = f(\pi - 0)$ olduğundan,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k(-\pi) + b_k \sin k(-\pi)) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

elde edilir.

6.15. Teorem: $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilen bir f fonksiyonunun Fourier serisinin bir x_0 noktasında bir s sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}[f(x_0+0)+f(x_0-0)-2s]F_n(x)\,dx = 0$$

olmasıdır.

İspat: f 'in Fourier katsayıları a_k ve b_k lar olmak üzere f 'in Fourier serisinin $n + 1$ inci kısmi toplamı

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)$$

olsun. Bu takdirde

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+x)F_n(x)\,dx$$

olduğunu 6.13. teoremün ispatında görmüştük.

$$S_n(x_0)-s=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+x)F_n(x)\,dx-s$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x_0-x)F_n(x)\,dx-\int_{0}^{\pi} f(x_0+x)F_n(x)\,dx\right]-s$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} f(x_0-x)F_n(-x)\,dx+\int_{0}^{\pi} f(x_0+x)F_n(x)\,dx\right]-s$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} f(x_0-x)F_n(x)+f(x_0+x)F_n(x)\,dx\right]-s\pi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} [f(x_0-x)+f(x_0+x)-2s]F_n(x)\,dx\right]$$

bulunur.

6.16. Teorem: f fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ de türevlenebilir, f 'nin türevi f' fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ de parçalı sürekli ve $f(-\pi)=f(\pi)$ oluyorsa f 'nin Fourier serisi $[-\pi,\pi]$ de f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat: f 'in Fourier katsayılarını a_n, b_n lerle ve f 'nin türevi f' 'nün Fourier katsayılarını a'_n, b'_n (türevlerini) lerle gösterelim. Her n için

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (f(x)=u \text{ ise } du=f'(x)dx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(f(x)\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n}b'_n$$

elde edilir ve

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(f(x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}a'_n$$

bulunur. _ Her n için $b'_n = -n\,a_n$ ve $a'_n = -n\,b_n$ elde edilir. (b'_n) ve (a'_n) dizileri f' fonksiyonunun Fourier katsayıları olduğundan 6.11. teoremden dolayı, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a'_n}{n}\right|$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a'_n}{n}\right|$ serileri yakınsaktır. $|a_n|=\left|\frac{b'_n}{n}\right|$ ve $|b_n|=\left|\frac{a'_n}{n}\right|$ olduğundan serileri yakınsaktır. Dolayısıyla yakınsak iki serinin toplamı olarak, $\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|+|b_n|\right]$ serisi yakınsaktır. Her n için $x\in[-\pi,\pi]$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|+|b_n|\right]$ serisi yakınsaktır.

Her n için $x\in[-\pi,\pi]$

$$\begin{aligned}|a_n\cos nx+b_n\sin nx| &\le |a_n\cos nx|+|b_n\sin nx|\\ &=|a_n||\cos nx|+|b_n||\sin nx|\\ &\le |a_n|+|b_n|\end{aligned}$$

olduğundan M- kriterinden dolayı $\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|+|b_n|\right]$ nin yakınsak olmasından

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

fonksiyon serisi $[-\pi,\pi]$ de düzgün yakınsak olur dolayısıyla,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

fonksiyon serisi $[-\pi,\pi]$ de düzgün yakınsaktır. 6.4. Sonuçdan dolayı bu fonksiyon serisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde f 'in Fourier serisi $[-\pi,\pi]$ de f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

6.6. Sonuç: f fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ de türevlenebilir, f 'nin türevi f' fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ de parçalı sürekli ve $f(\pi)=f(-\pi)$oluyorsa a_k ve b_k f in Fourier katsayıları olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}n\,a_n=0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}n\,b_n=0$$

dir.

İspat: 6.16. teoreminin ispatında her $n\in\mathbb{N}$ için $-n\,a_n=b'_n$ ve $n\,b_n=a'_n$ olduğu gösterilmişti. Bir fonksiyonun Fourier katsayıları 0'a yakınsayacağından f' nin Fourier katsayıları için

$$\lim_{n\to\infty}b'_n=0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty}a'_n=0$$

dir. Buradan $\lim_{n\to\infty} n\,a_n = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} n\,b_n = 0$ bulunur.

6.7. Sonuç: $f, f', f'', \ldots, f^{(p-1)}$ ler $[-\pi,\pi]$ de mevcut ve türevlenebilir, f(p) de $[-\pi,\pi]$ de integrallenebilirse ve

$$f(\pi) = f(-\pi), f'(\pi) = f'(\pi), f''(\pi) = f''(\pi), \ldots, f^{(p-1)}(\pi) = f^{(p-1)}(\pi)$$

oluyorsa

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} n^p b_n = 0$$

dır.

Örnek: α ve β sabit sayılar olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & -\pi \le x \le 0 \\ \beta x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\alpha\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + \beta\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\left[\alpha(1-(-1)^n) - \beta(1-(-1)^n)\right] \\
&= \frac{(\alpha-\beta)}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \frac{\beta}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx \\
&= \frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$b_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$$
$$=\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin x\,dx+\frac{\beta}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$$
$$=\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{\beta}{\pi}\left(\frac{-x\cos nx}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}$$
$$=(\alpha+\beta)\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

bulunur. f 'in Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(\alpha-\beta)}{\pi}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^2}\cos nx+(\alpha+\beta)\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right\}$$

dir. 6.14. teoremden dolayı bu seri $x_0\in(-\pi,\pi)$ için

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=\frac{f(x_0)+f(x_0)}{2}=f(x_0)$$

a yakınsar ve $x_0=\pm\pi$ için $\frac{f(-\pi-0)+f(\pi+0)}{2}$ ye yakınsar.

$$f(\pi-0)=\lim_{x\to-\pi+0}f(x)=\lim_{x\to\pi+0}\alpha x=\alpha(-\pi)=-\alpha\pi$$
$$f(-\pi+0)=\lim_{x\to\pi+0}f(x)=\lim_{x\to\pi+0}\beta x=\alpha\pi$$

olduğundan, $x=\pm\pi$ de $\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}$ ye yakınsar, dolayısıyla $x_0\in(-\pi,\pi)$ için

$$f(x_0)=\frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(\alpha-\beta)}{\pi}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^2}\cos nx_0+(\alpha+\beta)\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx_0\right\}$$

dir ve $x_0=\pi$ için

$$\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}=\frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(\alpha-\beta)}{\pi}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^2}\cos n\pi+(\alpha+\beta)\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi\right\}$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}+\frac{(\alpha-\beta)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2}(-1)^{2n-1}$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}+\frac{(\alpha-\beta)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{(2n-1)^2}$$

olduğundan

$$\frac{(\beta-\alpha)\pi}{2}=\frac{(\beta-\alpha)\pi}{4}+\frac{(\beta-\alpha)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

dir. Her iki yanı $\beta-\alpha$ ile bölersek

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

bulunur. Burada

$$T=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},\ Ç=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\ \text{ve}\ S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

alınırsa $S=T+Ç$ bulunur. $Ç=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{S}{4}$ olacağından

$$S=4Ç \text{ ve } T=3Ç$$

dir. Buna göre

$$T=\frac{\pi^2}{8} \text{ olduğundan } Ç=\frac{\pi^2}{24} \text{ ve } S=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

elde edilir.

Bu örnekte $\alpha=\beta=1$ alınırsa $f(x)=x$ fonksiyonunun Fourier serisi bulunur. $x\in(-\pi,\pi)$ için

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \text{ ise } x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

bulunur. $\alpha=-1$ ve $\beta=1$ alınırsa $f(x)=|x|$ olur ve dolayısıyla $x\in(-\pi,\pi)$ için

$$|x|=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)}{\pi}\frac{\left[1-(-1)^n\right]}{n^2}\cos nx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

bulunur.

FOURİER TRİGONOMETRİK SERİLER

6.7. Tanım (Fourier Kosinüs Serisi): f fonksiyonu $[0,\pi]$ de integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$ olmak üzere

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

serisine f 'in Fourier Kosinüs serisi denir.

6.8. Tanım (Fourier Sinüs Serisi): f fonksiyonun $[0,\pi]$ de integrallenebilir bir fonksiyon ve $b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

serisine f 'in Fourier sinüs serisi denir.

6.19. Teorem: f ile f′, $[0,\pi]$ de parçalı sürekli ise f 'in Fourier Kosinüs serisi her bir $x_0 \in (-\pi,\pi)$ için $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ ye yakınsar $x_0=0$ için $f(\pi+0)$ noktasına ve $x_0=\pi$ için $f(\pi-0)$ a yakınsar.

İspat:

$$G(x)=\begin{cases} f(-x), & -\pi \le x < 0 \text{ ve } -x, f\text{ 'nin tanım kümesi} \\ f(x), & 0 \le x \le \pi \text{ ve } x, f\text{ 'nin tanım kümesi} \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu G fonksiyonu her x için $G(-x)=G(x)$ esitligini sağladığından çift fonksiyondur ve $[-\pi,\pi]$ de parçalı süreklidir dolayısıyla integrallenebilirdir. G'nin Fourier serisi ile f 'in Fourier Kosinüs serisi aynıdır. Gerçekten; çift iki fonksiyonun çarpımı çift fonksiyon olacağından $G(x)\cdot\cos nx$ fonksiyonu çift fonksiyondur dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} G(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

dir. Çift fonksiyon ile tek fonksiyonun çarpımı tek fonksiyon olacağından $G(x)\cdot \sin nx$ fonksiyonu tek fonksiyondur dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\sin nx\,dx=0$$

dır. Böylece G'nin Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\cos nx)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+0\cdot\cos nx)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

dir. an ler f in Fourier katsayıları olduğundan G'nin Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \qquad (1)$$

aynı zamanda f 'in Fourier Kosinüs serisidir. G fonksiyonu ile türevi G', $[-\pi,\pi]$ de parçalı sürekli olduğundan 6.14. teoremden dolayı her bir $x_0 \in (0,\pi)$ için (1) serisi $\frac{G(x_0+0)+G(x_0-0)}{2}$ sayısına ve $x_0=\pm\pi$ için $\frac{G(-\pi+0)+G(\pi-0)}{2}$ sayısına yakınsar. Buna göre G çift bir fonksiyon olduğundan $x_0 \in (0,\pi)$ için

$$G(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}G(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$$

$$G(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}G(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$$

ise

$$G(x_0+0)=f(x_0+0)$$

olur. $x_0=0$ için

$$G(0-0)=\lim_{x\to x_0+0}G(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(-x)=f(0+0)$$

olup benzer şekilde

$$G(0+0)=f(0+0)$$

dir. $x_0=-\pi$ için

$$G(-\pi+0)=\lim_{x\to-\pi+0}G(x)=\lim_{x\to-\pi+0}f(-x)=f(-\pi+0) \text{ ise } G(-\pi+0)=f(\pi-0)$$

$$G(\pi-0)=\lim_{x\to\pi-0}G(x)=\lim_{x\to\pi-0}f(x)=f(\pi-0) \text{ ise } G(\pi-0)=f(\pi+0)$$

dir. (1) serisi $x_0 \in (0,\pi)$ için

$$\frac{G(x_0+0)+G(x_0-0)}{2}=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

sayısına yakınsar, $x_0=0$ için

$$\frac{G(0+0)+G(0-0)}{2}=\frac{f(0+0)+f(0+0)}{2}=f(0+0)$$

sayısına ve $x_0=\pi$ için

$$\frac{G(-\pi+0)+G(\pi-0)}{2}=\frac{f(\pi+0)+f(\pi+0)}{2}=f(\pi-0)$$

sayısına yakınsar.

6.20. Teorem: f ile f', $[0,\pi]$ de parçalı sürekli ise f 'in Fourier sinüs serisi her bir $x_0 \in (-\pi,\pi)$ için $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ ye yakınsar ve $x_0=0$ ve $x_0=-\pi$ için ise 0'a yakınsar.

İspat:

$$G(x)=\begin{cases}-f(-x), & -\pi\le x<0 \text{ ve } -x, f\text{ 'nin tanım kümesi}\\ f(x), & 0\le x\le\pi \text{ ve } x, f\text{ 'nin tanım kümesi}\end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. G fonksiyonun tek fonksiyondur. G'nin Fourier serisi ile f 'in Fourier sinüs serisi aynıdır. Gerçekten, tek bir fonksiyonla çift bir fonksiyonun çarpımı yine tek fonksiyon olacağından her n ∈ ℕ için

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\cos nx\,dx = 0$$

dır ve tek bir fonksiyonla tek bir fonksiyonun çarpımı çift fonksiyon olacağından her n ∈ ℕ için

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} G(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

dir, dolayısıyla an ler sıfır ve bn ler de f in Fourier sinüs serisinin katsayılarıdır. G'nin Fourier serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

dir ki bu aynı zamanda f in Fourier sinüs serisidir. 6.14. teorem kullanılarak G'nin tek fonksiyon olduğu gözönünde tutulup bir önceki teoremin ispatına benzer yol izlenerek ispat tamamlanır.

Örnek: Her $x \in [0,\pi]$ için $f(x) = x$ olarak tanımlanan fonksiyonun Fourier Kosinüs serisini bulunuz.

Çözüm: Her n ∈ ℕ için

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{[(-1)^2 - 1]}{n^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

O halde f 'in Fourier Kosinüs serisi

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{[(-1)^n - 1]}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

bulunur. f ve f′, $[0,\pi]$ de (parçalı) sürekli olduğundan her $x \in (0,\pi)$ için

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

dir ve x = 0 için $f(0+0) = \lim_{x\to-\pi+0} f(x) = \lim_{x\to-\pi+0} x = 0$ olduğundan

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\cdot 0}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 0$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

bulunur. x = π için $f(\pi+0)=\lim_{x\to-\pi-0} f(x)=\lim_{x\to-\pi-0} x=\pi$ olduğundan

$$\pi=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

bulunur.

Şimdi de f ’in Fourier sinüs serisinin katsayılarını bulalım. Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

bulunur. Buna göre f ’in Fourier Sinüs serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

dir. 6.20. teoremden dolayı her $x\in(0,\pi)$ için

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

dir ve x = 0 için $0=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n0$ ve de x = π için $0=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi$ dir.

Şimdi c herhangi bir pozitif sayı olmak üzere $[-c,c]$ aralığında integrallenebilir bir f fonksiyonunun Fourier serisinin katsayılarının nasıl verileceğini görelim. $t=\frac{c}{\pi}x$ degisken degistirmesi yapılırsa $dt=\frac{c}{\pi}dx$ ise $dx=\frac{\pi}{c}dt$ olacaktır ve $x=-\pi$ için $t=-c$ ve $x=\pi$ için $t=c$ olacağından, $f(t)=f\left(\frac{c}{\pi}x\right)=g(x)$ şeklinde verilen g’nin Fourier katsayıları her $n\in\mathbb{N}$ için

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}f(t)\left(\cos\frac{\pi}{c}t\right)\frac{\pi}{c}dt=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(t)\left(\cos\frac{\pi}{c}t\right)dt$$

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\frac{n\pi}{c}t\,dt = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{c}x\right)dx$$

ve

$$b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(t)\sin\frac{\pi}{c}t\,dt = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\left(\sin\frac{n\pi}{c}x\right)dx$$

olacaktır. Bunları gözönüne aldığımızda asağıdaki tanımı verebiliriz.

FOURİER KATSAYILARI

6.9. Tanım: f fonksiyonu $[-c, c]$ de integrallenebilir ise $a_0 = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{c}x\right)dx$ ve $b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\left(\sin\frac{\pi}{c}x\right)dx$ sayılarına f fonksiyonunun $[-c, c]$ de Fourier katsayıları denir ve

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi}{c}x + b_n\sin\frac{\pi}{c}x\right)$$

serisine de f fonksiyonunun $[-c, c]$ de Fourier serisi denir.

6.21. Teorem: f ile f′, $[-c, c]$ aralığında parçalı sürekli ise f ’nin $[-c, c]$ deki Fourier serisi her bir $x_0 \in (-c, c)$ için $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ ye yakınsar ve $x_0 = \pm c$ için $\frac{f(-c+0)+f(c-0)}{2}$ sayısına yakınsar. Yani her bir $x_0 \in (-c, c)$ için

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{c}x_0 + b_n\sin\frac{n\pi}{c}x_0\right)$$

ve $x_0 = -c$ için

$$\frac{f(-c+0)+f(c-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi(-c)}{c} + b_n\sin\frac{n\pi(-c)}{c}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(-1)^n$$

ve $x_0 = c$ için

$$\frac{f(-c+0)+f(c-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\pi + b_n\sin n\pi\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(-1)^n$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı 6.14. teoremden ve her $h(x) = \frac{c}{\pi}x$ fonksiyonunun sürekliligi ile f 'in $[-c, c]$ deki Fourier serisinin $g(x) = (f \circ h)(x)$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ deki Fourier serisi ile aynı olduğu gerçeginden elde edilir.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 4, & 0 < x < 5 \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{5}x\right)dx \\ &= \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{5}x\right)dx + \int_{0}^{5} f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{5}x\right)dx\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 0\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{5}x\right)dx + \int_{0}^{5} 4\left(\cos\frac{n\pi}{5}x\right)dx\right] \\ &= \frac{4}{5}\int_{0}^{5} \cos\frac{n\pi}{5}x\,dx \\ &= \frac{4}{5}\frac{5}{n\pi}[\sin n\pi - \sin 0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{0}^{5} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 4\,dx = = \frac{4}{5}x\Big|_0^5 = \frac{4}{5}\cdot 5 = 4$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\left(\sin\frac{n\pi}{5}x\right)dx \\ &= \frac{1}{5}\int_{0}^{5} f(x)\left(\sin\frac{n\pi}{5}x\right)dx \\ &= \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 4\left(\sin\frac{n\pi}{5}x\right)dx \\ &= \frac{4}{5}\frac{[1-(-1)^n]}{n} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre f in Fourier serisi

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{5}x+b_n\sin\frac{n\pi}{5}x\right)$$

$$=\frac{4}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos\frac{n\pi}{5}x+\frac{4}{\pi}\frac{[1-(-1)^n]}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x\right)$$

$$=2+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}}{(2n-1)}$$

bulunur. f ile f′ fonksiyonları $[-5,5]$ de parçalı sürekli olduğundan dolayı, her $x_0 \in (-5,5)\backslash\{0\}$

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}=2+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}\cdot\frac{1}{(2n-1)}$$

dir ve

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0+0) \text{ ve } \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$$

olduğundan $x_0 \in (-5,5)\backslash\{0\}$ için

$$f(x_0)=2+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}\cdot\frac{1}{(2n-1)}$$

dir ve $\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{0+4}{2}=2$ olduğundan $x_0=0$ için

$$2=2+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}\cdot\frac{1}{(2n-1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}\cdot\frac{1}{(2n-1)}=0$$

dir ve $x_0=\pm5$ için de $f(-5+0)=0$ ve $f(5-0)=4$ olduğundan

$$\frac{f(-5+0)+f(5-0)}{2}=\frac{0+4}{2}=2$$

olacağından

$$2=2+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{5}\cdot\frac{1}{(2n-1)}$$

$$2=2$$

bulunacaktır.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI, Ders Notları, Maltepe Üniversitesi, İstanbul, 2020.

2. Prof. Dr. Mustafa BALCI, Matematik Analiz I, Bilim kitap kırtasiye A.Ş., Ankara, 1997.