1. BÖLÜM
DİFERANSİYEL DENKLEMLERDE TEMEL KAVRAMLAR

GİRİŞ

Diferansiyel denklemler ilk kez, XIIV. yüzyılda, Sir Isaac Newton'un türevi tanımlamasından sonra türevin amaçları doğrultusunda kendisi tarafından ortaya konuldu. Newton, diferansiyel denklemleri parçacık ve gezegen hareketlerinin incelenmesinde kullandı. Bu konu, XIX. ve XX. yüzyılda gelişerek modern matematiğin bir kolu oldu. Diferansiyel denklemlerin gelişmesinde, Birkhoff, Cauchy, Lyapunov, Picard, Poincaré ve Riemann'ın önemli katkıları olmuştur. Bu matematikçiler ve bunlardan sonra gelenlerin elde ettiği kuramsal sonuçlar birçok bilimde uygulama alanı bulmuştur.

Fizik, Makine, İnşaat, Elektrik-Elektronik, Jeoloji ve bazı diğer bilimlerde bir olayı açıklamak ya da bir problemi çözmek, çoğu kez bir diferansiyel denklem kurmayı ve onu çözmeyi gerektirir. Bu nedenle diferansiyel denklemleri sınıflandırmak ve onların çözülebilirlilik durumlarını araştırmak diferansiyel denklemler kuramının başlıca konusunu oluşturur.

DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Diferansiyel denklemler genel olarak
i) Bayağı diferansiyel denklemler
ii) Kısmi diferansiyel denklemler
diye iki grup altında incelenir. Bu çalışmada bayağı diferansiyel denklemlerden söz edilecek ve gereksinme duymadıkça bayağı sıfatı kullanılmayacaktır.

1.1. Tanım: Tek bir değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme bayağı (adi, basit) diferansiyel denklem denir.

Bu bayağı denklemler en genel olarak,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

biçiminde yazılır. Burada $y^{(n)}$, y'nin x'e göre n. türevi demektir. Buna karşın, bu kitapta incelenecek olan denklemlerinin pek çoğunu

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

biçiminde yazılabilenler oluşturur. Yani, en yüksek basamaklı türeve göre çözülebilen denklemler.

Örneğin,

$$y'' + e^{y'} + 5xy' - \cos y = 0$$

denklemi $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ türünde bir denklemdir. Çünkü bu denklem y" ne göre çözülemez. Yine,

$$y'' - 5xy' + 8xy + 9 = 0$$

denklemi $y^{(n)} = g(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ türündedir. Çünkü bu denklemi,

$$y'' = 5xy' - 8xy - 9 = 0$$

şeklinde yazmak mümkün olmaktadır.

1.2. Tanım: İki ya da daha çok bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bir denkleme kısmi (parçalı) diferansiyel denklem denir.

$z = z(x, y)$ olmak üzere birinci basamaktan iki bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem en genel olarak

$$f\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

biçiminde yazılır. Örneğin,

$$3x\frac{\partial z}{\partial x} - (5x + y)\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

bir kısmi diferansiyel denklemdir. //

Gerek bayağı gerekse kısmi diferansiyel denklemler incelenirken onlar da kendi aralarında türlere ayrılır. Bu sınıflandırmalar yapılırken basamak (mertebe), derece ve doğrusallık kavramları kullanılır. Şimdi o kavramları verelim.

1.3. Tanım: Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin basamağına o denklemin basamağı (mertebesi) denir. Örneğin,

$$y' + 3xy = x^3$$

denklemi birinci basamaktan (mertebeden) ve

$$xy'' - 5x^2y' + 4y + 10 = 0$$

denklemi ikinci basamaktandır.

1.4. Tanım: Bir diferansiyel denklem denklemdeki tüm türevlere göre tam ve rasyonel olacak şekilde yazıldığında, denklemdeki en yüksek türevin derecesine o denklemin derecesi denir. Örneğin,

$$(y')^2 + \sin x\, y^3 - 6 = 0$$

denklemi ikinci dereceden ve

$$(y'')^3 + (y')^5 - 5y + 3x = 0$$

denklemi üçüncü derecedendir.

1.5. Tanım: Tam ve rasyonel şekle konulan bir diferansiyel denklemde, bağımlı değişken ve türevleri yalnız birinci dereceden olup, bunlar denklemde çarpım halinde bulunmuyorlarsa, denkleme doğrusaldır denir. Bayağı doğrusal diferansiyel denklemler en genel olarak, '

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x)$$

biçiminde yazılır. Bu denkleme n. basamaktan bayağı doğrusal diferansiyel denklem denir. Eğer, $b(x) = 0$ ise, denklem ikinci tarafsız bayağı doğrusal diferansiyel denklem diye adlandırılır, örneğin,

$$y' + 5xy = 8\ln x$$

denklemi birinci basamaktan bir doğrusal denklemdir. Fakat

$$y' + 5xy^2 = 4\ln x$$

denklemi doğrusal değildir. Çünkü o, y ye göre ikinci derecedendir.

FONKİSİYONLARIN İLKELDEN DİFERENSİYEL DENKLEMİN ELDE EDİLMESİ

Bu kesimde verilen bir ilkel fonksiyondan diferansiyel denklemin nasıl elde edilebileceğini açıklamaya çalışacağız. Önce tek parametreye bağlı olan

$$F(x, y, c) = 0 \qquad (1)$$

kapalı fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada c paramatresi değiştikçe (1) ile tanımlanan fonksiyon x, y-düzleminde farklı eğriler verir. İşte tüm bu eğrileri temsil eden diferansiyel denklemi bulabilmek için, y'nin x'in bir fonksiyonu olduğu göz önüne alınarak (1) in x'e göre türevi alınır. O zaman

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c)y' = 0 \qquad (2)$$

denklemi bulunur. (2) genel olarak, x, y, y' ve c'ye bağlıdır. Bu halde, (1) ile (2) arasında c parametresi yok edilerek

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

şeklinde birinci basamaktan bir diferansiyel denklem elde edilir. Şu halde (1) eğri kümesinin diferansiyel denklemi (3) tür. Eğer, (2) denklemi c'den bağımsız olsaydı, (1) in diferansiyel denklemi doğrudan doğruya (2) olacaktı.

Örnek: $y = 10e^{2x}$ fonksiyonundan diferansiyel denklemini elde ediniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonun x'e göre türevi
$y' = 20e^{2x}$
dir. İki denklem arasında c yok edildiğinde,
$y' - 2y = 0$
diferansiyel denklemi bulunur.

Örnek: $y = c_1(x + c_1)$ eğri ailesinin diferansiyel denklemini elde ediniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonun türevi $y' = c_1$ olduğundan
$y = y'(x + y')$
$y - xy' - (y')^2 = 0$
1. mertebeden 2. Dereceden diferansiyel denklemi elde edilir.

Örnek: $y = c\,(1 + \cos x)$ fonksiyonunun diferansiyel denklemini elde ediniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonun türevini alalım. Sonra da c'yi yalnız bırakalım.
$y' = c\,(-\sin x)$
$-\frac{y'}{\sin x} = c$
elde edilen bu değeri ilkelinde yerine yazalım. Sonra da düzenleme yapalım.
$y = -\frac{y'}{\sin x}\,(1 + \cos x)$
$\sin x\, y = -y'\,(1 + \cos x)$
$\sin x\, y + (1 + \cos x)y' = 0$
olarak bulunur.

Örnek: $x^2 + y^2 = c^2$ çemberlerinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm: Bu bir kapalı fonksiyon olup, x'e göre türevi
$x + y\,y' = 0$
dır. Elde edilen bu denklem c'den bağımsızdır, öyleyse bu denklem istenen diferansiyel denklemdir.//

Şimdi de iki parametreli
$$F(x, y, c_1, c_2) = 0 \tag{3}$$
kapalı fonksiyonunu göz önüne alarak diferansiyel denklemini bulmaya çalışalım. Bu denklemin x'e göre türevi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c_1, c_2) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c_1, c_2)y' = 0 \tag{4}$$

dır. (3) ve (4) denklemleri arasında genel olarak iki parametreyi yok etmek için yeterli değildir. O sebepten üçüncü bir denkleme ihtiyaç vardır. Bunun için (4) in tekrar x'e göre türevi alınır. O zaman

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial F}{\partial x}y'' = 0 \tag{5}$$

elde edilir. İşte, (3), (4) ve (5) denklemleri arasında c_1 ve c_2 parametreleri yok edilerek

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

şeklinde bir ikinci basamaktan bir diferansiyel denklem elde edilir .

Örnek: $y = 3e^x + 5\sin x$ (1)

fonksiyonunun çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun x'e göre türevi

$$y' = 3e^x + 5\cos x \tag{2}$$

dir. Bu iki denklem arasında 3 ve 5'i yok etmek mümkün değildir. Bu nedenle ikinci türeve ihtiyaç vardır. Bu türev

$$y'' = 3e^x - 5\sin x \tag{3}$$

olur. Şimdi elde edilen bu üç denklem arasında 3 ve 5'i yok edelim. (1) ve (3) denklemleri taraf tarafa toplayalım ve çıkaralım.

$$3 = \frac{y+y''}{2e^x},\ 5 = \frac{y-y''}{2\sin x} \tag{4}$$

elde edilir. (4) denklemini (2) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$y' = \frac{y+y''}{2e^x}e^x + \frac{y-y''}{2\sin x}\cos x$$

$$2y' = (y + y'') + (y - y'')\cot x$$

$$(1 - \cot x)y'' - 2y' + (1 + \cot x)y = 0$$

diferansiyel denklemi bulunur.

Örnek: c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1e^{4x} + c_2e^{5x} \tag{1}$$

fonksiyonunun çözüm kabul eden diferansiyel denklemi bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun x'e göre türevi

$$y' = 4c_1e^{4x} + 5c_2e^{5x} \tag{2}$$

dir. Bu iki denklem arasında c_1 ve c_2'i yok etmek mümkün değildir. Bu nedenle ikinci türeve ihtiyaç vardır. Bu türev

$$y'' = 16c_1e^{4x} + 25c_2e^{5x} \tag{3}$$

olur. Şimdi elde edilen bu üç denklem arasında c_1 ve c_2'i yok edelim. (1) ve (2) den,

$$-5y = -5c_1e^{4x} - 5c_2e^{5x} \text{ ve } y' = 4c_1e^{4x} + 5c_2e^{5x} \text{ ise } c_1 = \frac{y'-5y}{-e^{4x}}$$

(1) ve (3) den,

$$-16y = -16c_1e^{4x} - 16c_2e^{5x} \text{ ve } y'' = 16c_1e^{4x} + 25c_2e^{5x} \text{ ise } c_2 = \frac{y''-16y}{9e^{5x}}$$

bulunur. Bu son iki denklemi (1) de yerine yazarsak,

$$y = \frac{y'-5y}{-e^{4x}}e^{4x} + \frac{y''-16y}{9e^{5x}}e^{5x}$$

$$y = -y' + 5y + \frac{y''-16y}{9}$$

$$9y = -9y' + 45y + y'' - 16y$$

$$y'' - 9y' + 20y = 0$$

diferansiyel denklemi bulunur.//

Şimdi de tek değişkenli n parametreli,

$$F(x, y, c_1, \cdots, c_n) = 0 \tag{7}$$

kapalı fonksiyonunu göz önüne alalım. $c_1, \cdots, c_n$ parametrelerinin yok edilmesi için $n + 1$ denklemine ihtiyaç vardır. Bu sebeple, (7) in türevini n defa almak gerekir. Bu türevler,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial F}{\partial x}y'' = 0 \tag{9}$$

...

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x}y^{(n)} = 0 \tag{10}$$

dir. (7), (8), (9), ...,(10) denklemleri arasında $c_1, \cdots, c_n$ parametrelerinin yok edilmesiyle

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Yukarıdaki ifadeler göstermektedir ki n parametreli bir ilkel fonksiyona n. basamaktan bir diferansiyel denklem karşılık geldiğini gösterir. Ancak, $c_1, \cdots, c_n$ parametrelerinin birbirinden bağımsız olması gerekir. Eğer parametreler bağımsız değillerse, bağımlı olanların doğrusal bileşimi yeni bir parametre ile gösterildikten sonra diferansiyel denklem bulunur. Örneğin,

$$y = c_1x + c_2 + 8c_3$$

fonksiyonu her ne kadar üç parametreli gibi görünüyorsa da, c2 ve c3 birbirinden bağımsız olmadığı için, $c_2 + 8c_3 = c_4$ denilerek parametre sayısı azaltılır. Buna göre, yukarıda verilen fonksiyon gerçekte iki parametreli olup,

$$y = c_1x + c_4$$

şeklindedir. Bu ilkel fonksiyona karşı gelen diferansiyel denklem ikinci basamaktan

$$y'' = 0$$

denklemidir.

BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

Burada başlangıç değeri hakkında bilgi verelim. Sabit sayının türevi sıfır olduğundan bu sabit sayının değerini bulmaya başlangıç değer olarak adlandıracağız. Şimdi bu durumu örnekle izah edelim.

Örnek: $y' = 2x, y(0) = 5$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: Bu problem bir başka şekilde şöyle ifade edilebilir. $y' = 2x$ denkleminin $x = 0$ için $y = 5$ olan çözümünü bulmalıyız. Öyleyse önce genel çözümü bulalım. $y' = 2x$ in integrali

$$y = x^2 + c$$

dir. Genel çözümde $x = 0, y = 5$ yazılırsa,

$$5 = 0^2 + c$$

$$c = 5$$

bulunur. O halde istenen çözüm

$$y = x^2 + 5$$

dir. Görülüyor ki başlangıç değer probleminin çözümü geometrik olarak $y' = 2x$ denkleminin $(0, 1)$ noktasından geçen integral eğrisinin bulunması demektir.

Örnek: $y'' = e^x, y(0) = 0, y'(0) = 2$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: Önce genel çözümü bulalım. İntegrali alınınca,

$$y' = e^x + c_1$$

elde edilir. Bunun da tekrar integrali alınarak,

$$y = e^x + c_1x + c_2$$

genel çözümü bulunur. Verilen başlangıç koşullarını son iki denklemde kullanarak c_1 ve c_2 sabitlerini belirleyelim. Son denklemde $x = 0, y = 0$ yazıldığında

$$0 = e^0 + c_1 \cdot 0 + c_2$$

$$c_2 = -1$$

ve $y' = e^x + c_1$ denkleminde $x = 0, y' = 2$ yazıldığında

$$2 = e^0 + c_1$$

$$c_1 = 1$$

bulunur. Öyleyse aranan çözüm

$$y = e^x + x + 2$$

fonksiyonudur.

UYGULAMALI BİLİMLERDEN ÖRNEKLER

Bazı bilimlerde bir problemin çözümü bazen bir diferansiyel denklemin çözümünü gerektirir. Gerçekte diferansiyel denklemler biliminin bir amacı da uygulamalı bilimlerden gelen bu tür problemlere uygun çözüm yöntemleri bulmak ve onları daha genel bir açıdan incelemektir. Bu kısımda nüfus artımı ile ilgili bir uygulama yapılacaktır.

Örnek (Nüfus artışı): Belli bir bölgenin nüfusunu göz önüne alalım. Bu bölgeden dışarıya veya dışarıdan bu bölgeye herhangi bir insan göçü almadığım varsayalım. Bir t zamanında bu bölgedeki insanların sayısı N, doğum oranı n ve ölüm oranı m olsun. Bu takdirde, bir Δt zamanında, $n \cdot N \cdot \Delta t$ kadar insan doğacak ve $m \cdot N \cdot \Delta t$ kadar insan ölecektir. Eğer Δt zamanı boyunca nüfus değişimi ΔN ile gösterilirse,

$$\Delta N = (n - m) \cdot N \cdot \Delta t \qquad (1)$$

olacağı görülür. (1) denklemide $\Delta N / \Delta t$ oluşturularak $\Delta t \to 0$ için limit alınırsa, birinci basamaktan

$$\frac{dN}{dt} = (n - m) \cdot N\,, \ (t \geq 0) \qquad (2)$$

doğrusal diferansiyel denklemi elde edilir. Burada N, t'nin bir fonksiyonu olup, fiziksel nedenlerle doğal sayıdır.

Eğer başlangıçtaki ($t = 0$ anında) nüfus sayısını N_0 ile gösterirsek, problem bir başlangıç değer problemine dönüşür. Yani, $N(t)$ fonksiyonu (1) ile birlikte

$$N(0) = N_0 \qquad (3)$$

başlangıç koşulunu da sağlamalıdır. Bu taktirde, (2), (3) başlangıç değer probleminin çözümü

$$N(t) = N_0 e^{(n-m)t}$$

olur. Görüldüğü gibi $n > m$ ise nüfus artar, $n < m$ ise nüfus azalır.

ALIŞTIRMALAR

1. $y = ce^{-3x}$ fonksiyonunu kullanarak $y' + 3y = 0$ diferansiyel denklemini elde ediniz.

2. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ fonksiyonunu kullanarak $y'' - y = 0$ diferansiyel denklemini elde ediniz.

KAYNAKÇA

1. Doç. Dr. İhsan DAĞ, Bayağı Diferansiyel Denklemler, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1983.
2. Frank AYRES, Teori ve Problemlerle Diferansiyel Denklemler, Çeviri Doç. Dr. Ekrem PAKDEMİRLİ, Güven Kitapevi Yayınları, Ankara, 1978.
3. Arzu ERDEM, Adi Diferansiyel Denklemler, 2009-2010 Güz Dönemi Mühendislik Notları.
4. Yrd. Doç. Dr. Melek HAMZAOĞLU, Çözümlü Diferansiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi Yayın No:661, İstanbul, 2000.
5. Fatma KARAKOÇ, Hüseyin BEREKETOĞLU, Ankara Üniversitesi Ders Notları, Ankara, 2022.
6. Arzu ÜNAL, Gizem SEYHAN ÖZTEPE, Ankara Üniversitesi Ders Notları, Ankara, 2022.