2. BÖLÜM
1. MERTEBEDEN 1. DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

GİRİŞ

2.1. Tanım: $y' = f\,(x, y)$ biçiminde yazılabilen denklemlere birinci mertebeden ve birinci dereceden diferansiyel denklem denir. Eğer $f = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ biçiminde ise, $y' = f\,(x, y)$ denklemi

$$M(x, y)dx + N(x, y) = 0$$

şeklini alır.

f fonksiyonu $f = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ biçimine dönüştürülürse veya denklem bu şekilde verilirse, $Q(x, y) = 0$ denklemini sağlayan noktalarda f süreksiz ve $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ denklemini sağlayan (x, y) noktalarında ise f belirsiz olur, f 'nin süreksiz ve belirsiz olduğu noktalara $P(x, y)dx + Q(x, y) = 0$ denkleminin tekil noktaları olduğu reel analiz derslerinden bilinmektedir.

2.2. Tanım: x, y-düzleminde bir açık nokta kümesinin içinde bulunan her basit kapalı bir C eğrisinin içindeki tüm noktalara bu nokta kümesinin içinde kalıyorlarsa, bu kümeye basit bağlantılı bölge denir. Mesela konveks bir küme basit bağlantılı bölgedir.

DEĞİŞKENLERİNE AYRILABİLEN DENKLEMLER

2.3. Tanım: $y' = g(x)h(y)$ şeklinde yazılabilen denklemlere değişkenlerine ayırabilen denklemler denir. Burada, $g(x)$ ve $h(y)$ fonksiyonlarının belli bir bölgede sürekli olduğu varsayılır. Bu denklem,

$$g(x)dx - \frac{1}{h(y)}dy = 0$$

olur. Burada $M(x) = g(x), N(y) = \frac{1}{h(y)}$ olarak alınırsa

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemini çözmek için terim terime integral almak yeterlidir. Buna göre,

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

ifadesi ile tanımlanan y fonksiyonu istenen genel çözümünü verir.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ise $y\,dy = -x\,dx$

$$\int y\,dy + \int x\,dx = 0$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 0$$

olur.

Örnek: $y' = \sqrt{xy}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{x}\,dx$$

$$y^{-1/2}dy = x^{1/2}\,dx$$

şeklinde yazılır. Sonra terim terime integral alınarak,

$$\int y^{-1/2}dy - \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 0$$

$$\frac{y^{1/2}}{1/2} - \frac{x^{3/2}}{3/2} = 0$$

$$3\sqrt{y} - \sqrt{x} = c$$

genel çözümü elde edilir.

Örnek: $y' = e^y \cos x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = e^y \cos x$

$$\frac{dy}{e^y} = \cos x\,dx$$

$$\cos x\,dx - e^{-y}dy = 0$$

şeklinde yazılır. Sonra terim terime integral alınarak,

$$\int \cos x\,dx - \int e^{-y}dy = 0$$

$$\sin x + e^{-y} = c$$

genel çözümü bulunur.

Örnek: $y' = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx} = -\frac{1+y^2}{1+x^2}$

$$\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{1+y^2} + \frac{dx}{1+x^2} = 0$$

şeklinde yazılır. Sonra terim terime integral alınarak,

$$\int \frac{dy}{1+y^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = 0$$

$$\arctan y + \arctan x = c$$

genel çözümü bulunur.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y(1-x^2)^{1/2}}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\int y\,dy = \int \frac{x\,dx}{(1-x^2)^{1/2}}$

$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

burada da $u = 1 - x^2$ değişken değiştirmeyi uygularsak $du = -2x\,dx$ değişken dönüşümü yapılır.

$$\frac{y^2}{2} = -\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -2\sqrt{1-x^2} + c$$

$$\frac{y^2}{2} + 2\sqrt{1-x^2} = c$$

Örnek: $x(y+1)^2dx + (x^2+1)ye^y dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{ye^y dy}{(y+1)^2} = 0$ Burada da önce birinci integrale bakalım.

$u = x^2 + 1$ alınırsa $du = 2x\,dx$ olup değişken değiştirme uygulanırsa

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c_1$$

bulunur. İkinci integrale bakalım.

$$u = ye^y,\ dv = \int \frac{dy}{(y+1)^2}$$

seçilelim. Burada

$$du = e^y(y+1)dy,\ v = -\frac{1}{y+1}$$

olduğundan kısmi integrasyon gereği

$$\int \frac{ye^y dy}{(y+1)^2} = ye^y\left(-\frac{1}{y+1}\right) - \int -\frac{1}{y+1}e^y(y+1)dy$$

$$= -\frac{ye^y}{y+1} + e^y + c_2$$

$$= \frac{e^y}{y+1} + c_2$$

olur. İki denklemden

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{e^y}{y+1} + c_1 + c_2 = 0,\quad (c_1 + c_2 = -c)$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{e^y}{y+1} = c$$

olur.

Örnek: $4x\sqrt{y^2+1}\,dx - y\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $4x\sqrt{y^2+1}\,dx - y\,dy = 0$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} = 4x\,dx$$

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+1}} = \int 4x\,dx$$

olur. Burada $u = y^2 + 1$ dönüşümü yapılırsa $du = 2y\,dy$ olup

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 4\int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = 2x^2 + c$$

$$u^{1/2} = 2x^2 + c$$

$$\sqrt{y^2+1} = 2x^2 + c$$

$$\sqrt{y^2+1} - 2x^2 = c$$

olur.

Örnek: $x(y-1)y' = y(x+1)$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $x(y-1)y' = y(x+1)$

$$x(y-1)\frac{dy}{dx} = y(x+1)$$
$$x(y-1)dy - y(x+1)dx$$
$$\frac{y-1}{y}dy - \frac{x+1}{x}dx = 0$$
$$\int \frac{y-1}{y}dy - \int \frac{x+1}{x}dx = 0$$
$$y - \ln y - x - \ln x = \ln c$$
$$y - x - \ln xy = \ln c$$
$$e^{y-x}(xy)^{-1} = c$$
$$\frac{e^{y-x}}{xy} = c$$

olarak bulunur.

Örnek: $\frac{dy}{dx} + ye^x = e^x y^2$ diferansiyel denklemini çözünüz

Çözüm: Verilen diferansiyel denklemi değişkenlerine ayrılabilen türdendir dolayısıyla;

$$\frac{dy}{dx} + ye^x = e^x y^2$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x y^2 - ye^x$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x(y^2 - y)$$
$$\frac{dy}{y^2-y} = e^x dx$$
$$\int \frac{dy}{y^2-y} = \int e^x dx$$

Birinci integral için $\frac{1}{y^2-y} = \frac{A}{y} - \frac{B}{y-1}$ rasyonel kesirlere ayırma yöntemi uygulanırsa $A = -1, B = 1$ alınırsa

$$\int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \int e^x dx$$

$$\ln(y-1) - \ln y = e^x + c$$

$$\ln \frac{y-1}{y} = e^x + c$$

olarak bulunur.

Örnek: $(3x+8)(y^2+4)dx - 4y(x^2+5x+6)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\int \frac{(3x+8)\,dx}{(x^2+5x+6)} - \int \frac{4y\,dy}{(y^2+4)} = 0$ birinci için aşağıdaki dönüşümleri yaparsak;

$$\frac{3x+8}{(x^2+5x+6)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$$

$$3x+8 = A(x+2) + B(x+3)$$
$$3x+8 = (A+B)x + (2A+3B)$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=3 \\ 2A+3B=8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2A-2B=-6 \\ 2A+3B=8 \end{array}\right\}$$

$$A = 1, B = 2$$

$$\int \frac{(3x+8)\,dx}{(x^2+5x+6)} = \int \left(\frac{1}{x+3} + \frac{2}{x+2}\right) dx$$
$$= \ln|x+3| + 2\ln|x+2|$$
$$= \ln|(x+3)(x+2)^2|$$

İkinci integraller için $u = y^2 + 4$ ise $du = 2y\,dy$ olacağından

$$\int \frac{4y\,dy}{(y^2+4)} = \int \frac{2\,du}{u} = 2\ln u = 2\ln(y^2+4) = \ln(y^2+4)^2$$

olur. İki işlem birleştirilirse

$$\int \frac{(3x+8)\,dx}{(x^2+5x+6)} - \int \frac{4y\,dy}{(y^2+4)} = 0$$

$$\ln\left|\frac{(x+3)(x+2)^2}{(y^2+4)^2}\right| = \ln c$$

$$\left|\frac{(x+3)(x+2)^2}{(y^2+4)^2}\right| = c$$

elde edilir.

Homojen Diferansiyel Denklemler

2.4. Tanım: Birinci mertebeden bir lineer bayağı diferansiyel denklemin $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ şeklinde verildiğini biliyoruz. Eğer $\frac{x}{y}$ veya $\frac{y}{x}$'in

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

olacak biçimde bir g fonksiyonu varsa, o zaman $f(x,y)$ fonksiyonuna homojen fonksiyon, denkleme de homojen diferansiyel denklem denir. Homojen diferansiyel denklemler $y = vx$ eşitliği ile çözüm aranır. Burada $dy = v\,dx + x\,dv$ olduğunu unutmamak gerekir. Burada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(vx)}{dx} = \frac{x\,dv+v\,dx}{dx} = \frac{x\,dv}{dx} + \frac{v\,dx}{dx} = \frac{x\,dv}{dx} + v$$

olmaktadır.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

olduğundan homojendir. $y = vx$ dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{d(vx)}{dx} = \frac{x}{vx} + \frac{vx}{x}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} + \frac{v\,dx}{dx} = \frac{1}{v} + v$$

$$\int v\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^2}{2} = (\ln x) + c$$

$$\frac{y^2}{2x^2} - \ln x = c$$

bulunur.

Örnek: $(3x^2 - y^2)dx - 2xy\,dx = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-y^2}{2xy} = \frac{3x^2}{2xy} - \frac{y^2}{2xy} = \frac{3x}{2y} - \frac{y}{2x}$$

olduğundan homojendir. $y = vx$ dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{x\,dv}{dx} + v = \frac{3}{2v} - \frac{v}{2}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{3}{2v} - \frac{3v}{2} = \frac{3-3v^2}{2v}$$

$$\frac{2v\,dv}{3-3v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2v\,dv}{3v^2} = \int \frac{dx}{x}$$

Birinci integralde $u = 1 - v^2$ dönüşümü yapılırsa $du = -2v\,dv$ olup

$$\frac{1}{3}\int \frac{2v\,dv}{1-v^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3}\ln u = -\frac{1}{3}\ln(1 - v^2) =$$

$$\ln\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1/3}$$

bulunur. Buna iki denklem

$$\ln\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1/3} = \ln x + \ln c$$

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^{-1/3} = xc$$

$$\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}\right)^{1/3} = xc$$

biçiminde sonuçlanır.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

olduğundan homojendir. $y = vx$ dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{x\,dv}{dx} + v = v^2 + 2v$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = v^2 + v$$

$$\frac{dv}{v^2+v} = \frac{dx}{x}$$

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv = \frac{dx}{x}$$

$$\ln v - \ln(v+1) = \ln x + \ln c$$

$$\ln \frac{v}{x(v+1)} = \ln c$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{x\left(\frac{y}{x}+1\right)} = c$$

$$\frac{y}{x^2+xy} = c$$

Örnek: $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz

Çözüm: $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy-x^2} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{xy-x^2}{x^2}} = \frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}-1}$$

olduğundan homojendir. $y = vx$ dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{x\,dv}{dx} + v = \frac{1+v^2}{v-1}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v-1} - v = \frac{v+1}{v-1}$$

$$\frac{v-1}{v+1}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{v-1}{v+1}dv = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\int 1 - \frac{2}{v+1}dv = \int \frac{1}{x}dx$$

$$v - 2\ln(1+v) = \ln x + \ln c$$

$$v = \ln(1+v)^2 + \ln x + \ln c$$

$$v = \ln cx(1+v)^2$$

$$e^v = cx(1+v)^2$$

$$e^{y/x} = cx\left(1+\frac{y}{x}\right)^2$$

ifadesi elde edilir.

Örnek: $xy^2y' = y^3 - x^3$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3-x^3}{xy^2} = \frac{y^3}{xy^2} - \frac{x^3}{xy^2} = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$$

olduğundan homojendir. $y = vx$ dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{x\,dv}{dx} + v = v - \frac{1}{v^2}$$

$$v^2dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\int v^2dv + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{v^3}{3} + \ln x = 0$$

$$\frac{y^3}{3x^3} + \ln x = 0$$

elde edilir.

Örnek: $xy' = y + xe^{y/x}$ diferansiyel denklemini $y(-1) = 1$ başlangıç koşulu altında çözünüz.

Çözüm: $xy' = y + xe^{y/x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}$$

olduğundan homojendir. $y = vx$ dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{x\,dv}{dx} + v = v + e^{v}$$

$$\frac{dv}{e^{v}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{e^{v}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$e^{-v} = \ln x + c$$

$$e^{-y/x} = \ln x + c$$

$y(1) = 1$ şartını uygularsak

$$e^{-(-1)/1} = \ln 1 + c$$

$$c = e$$

bulunur. Buna göre denklem

$$e^{-y/x} = \ln x + e$$

olarak bulunur.

Örnek: $x \cos\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = x + y\cos\frac{y}{x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu diferansiyel denklem homojendir. Gerçekten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}$$

olduğundan homojendir. $y = vx$ dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{x\,dv}{dx} + v = \frac{1+v\cos v}{\cos v}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

$$\cos v\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \cos v\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sin v = \ln x + c$$

$$\sin\frac{y}{x} - \ln x = c$$

olur.

Örnek: $(x^2 + 2y^2)dx - xy\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $(x^2 + 2y^2)dx - xy\,dy = 0$

$$\frac{x^2+2y^2}{xy} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{x^2}{xy} + \frac{2y^2}{xy} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{x}{y} + \frac{2y}{x} = \frac{dy}{dx}$$

olduğundan homojendir. $y = vx$ dönüşümleri yapılırsa;

$$\frac{1}{v} + 2v = \frac{x\,dv}{dx} + v$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{v\,dv}{v^2+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v\,dv}{v^2+1}$$

İkinci denklemde $u = v^2 + 1$ dönüşümü uygulanırsa $du = 2v\,dv$ olup

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$\ln x = \frac{1}{2}\ln u + \ln c$$

$\ln x = \ln c\sqrt{u}$

$x = c\sqrt{v^2 + 1}$

$x = c\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1}$

$c = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

olur.

1.1. Not: Bazı denklemlerde $y = xv$ dönüşümü dışında farklı dönüşümlerde uygulanmak zorunda kalınabilir. Şimdi bu tür denklemlere bir örnek verelim.

Örnek: $\frac{dy}{dx} = (y-4x)^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $dy = (y-4x)^2dx$ denkleminde $y = 4x + v$ dönüşümü uygularsak $dy = 4dx + dv$ olur. Buna göre

$4dx + dv = v^2dx$

$\frac{dv}{dx} = v^2 - 4$

$\frac{dv}{v^2-4} = dx$

$\int \frac{dv}{v^2-4} = \int dx\,, \qquad \left(\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+a}{x-a}\right)$

$\frac{1}{4}\ln\frac{v+2}{v-2} = x + c$

$\frac{1}{4}\ln\frac{y-4x+2}{y-4x-2} = x + c$

olarak elde edilir.

TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.5. Tanım: $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ olacak şekilde düzlemin belli bir B bölgesinde sürekli türevleri olan bir $F(x,y)$ fonksiyonu varsa,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

denklemine tam diferensiyel denklem denir. Bu tanımdan, (1) biçiminde verilen her denklemin tam diferensiyel olacağı anlamı çıkarılmamalıdır. Çünkü, $y' = f(x,y)$ şeklinde verilen her denklem (1) biçiminde yazılabildiği halde bazı denklemler tam diferensiyel değildir. Bununla ilgili ileride bahsedilecektir.

2.1. Teorem: Eğer, $M(x,y), N(x,y)$ ve türevleri düzlemin bir B bölgesinde sürekli ve $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ ise, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denklemi tam diferansiyeldir.

İspat: Bir B bölgesinde sabit bir (x_0, y_0) noktası gözönüne alarak,

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)ds + \int_{y_0}^{y} N(x,t)dt$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun her iki yanının x'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x,t)}{\partial x}dt \qquad (2)$$

olur. Hipotez gereğince, $\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial t}$ olup, bu değer (2) de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y_0) + M(x,y_0) - M(x,y) = M(x,y)$$

bulunur. Benzer şekilde $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ elde edilir. Öyleyse, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tam diferansiyeldir.

2.2. Teorem: Eğer, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ ve $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ türevleri düzlemin bir B bölgesinde sürekli ve $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel ise,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

dir.

İspat: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tam diferansiyel olduğundan tanım gereğince,

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

olacak şekilde bir $F(x,y)$ fonksiyonu vardır. Yukarıdaki eşitliklerden birincisinin y'ye ve İkincisinin x'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad (3)$$

olur. Hipotez gereğince $\frac{\partial M}{\partial y}$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}$ sürekli olduğundan,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x}$$

dir. Öyleyse, (3) eşitliğinin ikinci yanları da özdeş olmalıdır. Buradan, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ sonucuna varılır.

2.3. Teorem: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denklemi tam diferensiyel olsun ve

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

olacak şekilde bir $F(x,y)$ fonksiyonu bulunsun. Bu taktirde y'in, diferansiyel denklemin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$F(x,y) = c$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat: Bir $F(x,y) = c$ denklemi bulmak için, y'in bir çözüm olduğunu varsayalım. Verilen diferansiyel denklemde M ve N yerine hipotezle verilmiş olan $M = \frac{\partial F}{\partial x}, N = \frac{\partial F}{\partial y}$ değerleri yazılırsa

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

olur. Elde edilen denklem tam diferansiyel olduğundan

$$dF(x,y) = 0$$

bulunur. Bu ise $F(x,y) = c$ olduğunu gösterir.

Tersine, y'in $F(x,y) = c$ denklemini sağladığını varsayarak, göstermeliyiz ki; y, tam diferensiyel denklemin bir çözümüdür. Kapalı fonksiyonların türevi kuralına göre, $F(x,y) = c$ nin türevi alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

elde edilir. Bu denklem de $\frac{\partial F}{\partial x}$ ve $\frac{\partial F}{\partial y}$ yerine, hipoteze göre, M(x,y) ve N(x,y) konulduğunda,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

bulunur. Bu bize y'in bir çözüm olduğunu gösterir. //

Örnek: $(2x + e^y)dx + (xe^y)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = 2x + e^y$ ve $N(x,y) = xe^y$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = e^y$$

elde edilir ki bu denklem tam diferansiyel denklemdir. M(x, y) ye göre değerlendirme yapalım.

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y)$$

$$F(x,y) = \int (2x + e^y)dx + \phi(y)$$

$$F(x,y) = x^2 + xe^y + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$N(x,y) = xe^y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$xe^y = xe^y + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$0 \cdot dy = d\phi(y)$$

$$\phi(y) = c$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$x^2 + xe^y + c = 0$$

bulunur.

Örnek: $3x(xy-2)dx+(x^3+2y)dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=3x(xy-2)$ ve $N(x,y)=x^3+2y$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2$$

olduğundan tam diferansiyel denklemdir. N(x, y) ye göre değerlendirme yapalım.

$$F(x,y)=\int N(x,y)dy+\phi(x)$$
$$F(x,y)=\int(x^3+2y)dy+\phi(x)$$
$$F(x,y)=x^3y+2y+\phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2y+\frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$M(x,y)=3x^2y+\frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$3x(xy-2)=3x^2y+\frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$-6x=\frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$-6\int x\,dx=\int d\phi(x)$$
$$-3x^2+c=\phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y)=0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$x^3y+y^2-3x^2+c=0$$

olur.

Örnek: $2xydx+(x^2y-1)dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=2xy$ ve $N(x,y)=x^2y-1$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

olduğundan tam diferansiyel denklemdir.

$$F(x,y)=\int(2xy)dx+\phi(y)$$
$$F(x,y)=x^2y+\phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2y+\frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$x^2y-1=x^2y+\frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$-\int dx=\phi(x)$$
$$-y+c=\phi(y)$$

olur. Bu değeri $F(x,y)=0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$x^2y-y+c=0$$

bulunur.

Örnek: $\left(\frac{3-y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{y^2-2x}{xy^2}\right)dy = 0, \quad y(-1) = 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = \frac{3-y}{x^2} = \frac{3}{x^2} - \frac{y}{x^2}$ ve $N(x,y) = \frac{y^2-2x}{xy^2} = \frac{1}{x} - \frac{2}{y^2}$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

olduğundan tam diferansiyel denklemdir. M(x, y) ye göre değerlendirme yapalım.

$$F(x,y) = \int\left(\frac{3}{x^2} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \phi(y)$$

$$F(x,y) = -\frac{3}{x} + \frac{y}{x} + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x} + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{y^2} = \frac{1}{x} + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$-\frac{2}{y^2}dy = d\phi(y)$$

$$-\frac{2}{y^2}\int dy = \phi(y)$$

$$2y^{-2} + c = \phi(y)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{y-3}{x} + \frac{2}{y^2} + c = 0$$

olur. $y(-1) = 1$ olduğundan

$$\frac{1-3}{-1} + \frac{2}{(-1)^2} + c = 0$$

$$c = -4$$

$$\frac{y-3}{x} + \frac{2}{y^2} = 4$$

elde edilir.

Örnek: $(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y + 2)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = y\cos x + 2xe^y$ ve $N(x,y) = \sin x + x^2e^y + 2$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^{y}$$

olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir.

$$F(x,y) = \int (y\cos x + 2xe^{y})dx + \phi(y)$$
$$F(x,y) = y\sin x + x^2e^{y} + \phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sin x + 2xe^{y} + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$\sin x + x^2e^{y} + 2 = \sin x + 2xe^{y} + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$\int 2\,dx = \phi(y)$$
$$2y + c = \phi(y)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$y\sin x + x^2e^{y} + 2y + c = 0$$

bulunur.

Örnek: $(2x^3 + xy^2 + 2y + 3)dx + (2x + x^2y)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 2y + 3$ ve $N(x,y) = 2x + x^2y$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy + 2$$

olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir.

$$F(x,y) = \int (2x^3 + xy^2 + 2y + 3\,)dx + \phi(y)$$
$$F(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + 2xy + 3x + \phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + 2x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$2x + x^2y = x^2y + 2x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$0 \cdot dy = \phi(y)$$
$$\phi(y) = c$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + 2xy + 3x + c = 0$$

bulunur.

Örnek: $(2x + 16xy)dx + (8x^2 - 30y^2)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = 2x + 16xy$ ve $N(x,y) = 8x^2 - 30y^2$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 16x$$

olduğundan verilen denklem tam diferansiyel denklemdir.

$$F(x,y) = \int (2x + 16xy)dx + \phi(y)$$
$$F(x,y) = x^2 + 8x^2y + \phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 8x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$8x^2 - 30y^2 = 8x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$-30\int y^2\,dy = \phi(y)$$
$$-10y^3 + c = \phi(y)$$

olur. Bu değeri $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$x^2 + 8x^2y - 10y^3 + c = 0$$

bulunur.

Örnek: $(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = 2x^3 + 3y$ ve $N(x,y) = 3x + y - 1$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

olduğundan tam diferansiyeldir.

$$F(x,y) = \int (2x^3 + 3y)dx + \phi(y)$$
$$F(x,y) = \frac{x^4}{2} + 3xy + \phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$3x + y - 1 = 3x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$\int (y-1)dy = \phi(y)$$
$$\frac{y^2}{2} - y + c = \phi(y)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y + c = 0$$

bulunur.

Örnek: $(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$ diferansiyel denklemini $y(0) = 2$ başlangıç şartı altında çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = \cos x \sin x - xy^2$ ve $N(x,y) = y(1-x^2)$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

olduğundan tam diferansiyeldir.

$$F(x,y) = \int (y - x^2y)dy + \phi(x)$$

$$F(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2y^2}{2} + \phi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -xy^2 + \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\cos x \sin x - xy^2 = -xy^2 + \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\int \cos x \sin x \, dx = \phi(x)$$

olur. Burada integrali çözmek için $u = \sin x$ değişen değiştirmesi uygulayalım. $du = \cos x \ dx$ olduğundan

$$\int u \, du = \frac{1}{2}u^2 + c$$

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + c = \phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{y^2}{2}\left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2}\sin^2 x + c = 0$$

elde edilir. $y(0) = 4$ başlangıç şartı olduğuna göre

$$\frac{4^2}{2}\left(1 - 0^2\right) + \frac{1}{2}\sin^2 0 + c = 0$$

$$c = -8$$

$$\frac{y^2}{2}\left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2}\sin^2 x = 8$$

denklemi bulunur.

Örnek: $(x + y + 1)dx + (x - y - 3)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = x + y + 1$ ve $N(x,y) = x - y - 3$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

olduğundan tam diferansiyeldir.

$$F(x,y) = \int (x + y + 1)dx + \phi(y)$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$x - y - 3 = x + \frac{d\phi(y)}{dx}$$
$$\int(-y-3)dy = \phi(y)$$
$$-\frac{y^2}{2} - 3y + c = \phi(y)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^2}{2} - 3y + c = 0$$

bulunur.

Örnek: $xy' = 2xe^x - y + 6x^2$ diferansiyel denkleminin tam diferansiyel olduğunu gösteriniz ve çözümünü bulunuz.

Çözüm: $xy' = 2xe^x - y + 6x^2$

$$y' = \frac{2xe^x - y + 6x^2}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^x - y + 6x^2}{x}$$
$$(2xe^x - y + 6x^2)dx + (-x)dy = 0$$

olur. Şimdi tam diferansiyel olup olmadığını inceleyelim. $M(x,y) = 2xe^x - y + 6x^2$ ve $N(x,y) = -x$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

olduğundan tam diferansiyeldir.

$$F(x,y) = \int -x\, dy + \phi(x)$$
$$F(x,y) = -xy + \phi(x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y + \frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$2xe^x - y + 6x^2 = -y + \frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$\int(2xe^x + 6x^2)dx = \phi(x)$$
(1)

Burada önce $\int 2xe^x\, dx$ integralini çözelim. Bunun için kısmi integrasyon uygulayalım.

$u = 2x$ ve $dv = e^x\, dx$ seçilirse $du = 2\, dx$ ve $v = e^x$

olacağından

$$\int 2xe^x\, dx = 2xe^x - 2\int e^x\, dx = 2xe^x - 2e^x = 2e^x(x-1)$$
(2)

olur. (2) eşitliğini (1) eşitliğinde yazarsak

$$2e^x(x-1) + 2x^3 + c = \phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$2e^x(x-1) + 2x^3 - xy + c = 0$$

bulunur.

Örnek: $\left(2+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\frac{1}{x}\right)dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=2+\frac{y}{x^2}$ ve $N(x,y)=y-\frac{1}{x}$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$$

olduğundan tam diferansiyeldir.

$$F(x,y)=\int\left(y-\frac{1}{x}\right)dy+\phi(x)$$
$$F(x,y)=\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+\phi(x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y}{x^2}+\frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$2+\frac{y}{x^2}=\frac{y}{x^2}+\frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$\int 2\,dx=\phi(x)$$
$$2x+c=\phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y)=0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{y^2}{2}-\frac{y}{x}+2x+y+c=0$$

bulunur.

Örnek: $(2xy-3x^2)dx+(x^2+y)dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=2xy-3x^2$ ve $N(x,y)=x^2+y$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

olduğundan tam diferansiyeldir.

$$F(x,y)=\int(2xy-3x^2)dx+\phi(y)$$
$$F(x,y)=x^2y-x^3+\phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+\frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$x^2+y=x^2+\frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$\int y\,dy=\phi(x)$$
$$\frac{y^2}{2}+c=\phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y)=0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$x^2y-x^3+\frac{y^2}{2}+c=0$$

bulunur.

Örnek: $2yy'x(x+y^2)-(x^2-y^2x)=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $2yx\dfrac{dy}{dx}(x+y^2)-(x^2-y^2x)=0$

$$2y\frac{dy}{dx}(x+y^2)-(x-y^2)=0$$

$$(x-y^2)dx-2y(x+y^2)dy=0$$

haline dönüşür. Buna göre $M(x,y)=x-y^2$ ve $N(x,y)=-2y(x+y^2)$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-2y$$

olduğundan tam diferansiyeldir.

$$F(x,y)=\int(x-y^2)dx+\phi(y)$$

$$F(x,y)=\frac{x^2}{2}-xy^2+\phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2xy+\frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$-2yx-2y^3=-2xy+\frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$-2\int y^3dy=\phi(y)$$

$$-\frac{1}{2}y^4+c=\phi(y)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y)=0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{x^2}{2}-xy^2-\frac{1}{2}y^4+c=0$$

bulunur.

İNTEGRAL ÇARPANI

2.6. Tanım: Tam diferansiyel olmayan denklemleri tam diferansiyel yapma katsayısına integral çapını denir. Yani bir integral çarpanı ile tam diferansiyel olabilir.

2.4. Teorem: Bir tam diferansiyel denklem

$$\lambda(x,y)M(x,y)dx+\lambda(x,y)N(x,y)dy=0$$

şartı biçiminde ise buradaki $\lambda(x,y)$ integral çarpanı

i) Yalnız x'e bağlıysa $\lambda = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ dir.

ii) Yalnız y'e bağlıysa $\lambda = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$ dir.

İspat: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ biçiminde verilen ve tam diferansiyel olmayan denklem $M_y \neq N_x$ olduğu takdirde $\lambda(x,y)$ katsayısı ile

$$\lambda(x,y)M(x,y)dx + \lambda(x,y)\,N(x,y)dy = 0$$

denklemi tam diferansiyel olabilir. Bu denkleme tam diferansiyellik şartı uygularsak,

$$\frac{\partial[\lambda(x,y)M(x,y)]}{\partial y} = \frac{\partial[\lambda(x,y)N(x,y)]}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial\lambda}{\partial x} - M\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad (1)$$

parçalı diferansiyel denklemi elde edilir. Burada λ'nın yalnız x'ya da yalnız y'ye bağlı olması halinde (1) denklemi bayağı diferansiyel denkleme indirgenir. Şimdi λ'nın bu özel halleri için bir integral çarpanının nasıl bulunacağım görelim.

i) $\lambda = \lambda(x)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0$ olacağı için, (1) denklemi yalnız x'e bağlıysa,

$$N\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{M_y - N_x}{N}dx$$

$$\lambda = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

bayağı diferansiyel denklemine indirgenir. Böylece bu denklemden bulunacak olan $\lambda(x)$ çarpanı verilen denklemin her terimi ile çarpılırsa denklem tam diferansiyel olur.

ii) $\lambda = \lambda(y)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0$ olacağı için (1) denklemi yalnız y'e bağlıysa,

$$-M\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \lambda\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{M_y-N_x}{-M}dy$$

$$\lambda=e^{\int\frac{M_y-N_x}{-M}dy}$$

bayağı diferansiyel denklemine indirgenir. Benzer şekilde bu denklemden bulunacak olan $\lambda(y)$ çarpanı verilen denklemin her terimi ile çarpılarak denklem tam diferansiyel yapılmış olur.

Örnek: $(x-y)dx-dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y)=x-y$ ve $N(x,y)=-1$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-1,\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

olup $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ tam diferansiyel değildir. Şimdi integral çarpanının hangi değişkene bağlı olduğunu bulalım.

$$\lambda(x,y)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-1-0}{-1}=1$$

$$\mu=e^{\int\lambda(x,y)dx}=e^{\int 1\cdot dx}=e^x$$

integral çarpanı bulunur. Bu çarpan ile verilen denklemin iki tarafı çarpılırsa;

$$e^x(x-y)dx-e^xdy=0$$

bulunur. Bu durumda

$$M(x,y)=e^x(x-y)\text{ ve }N(x,y)=-e^x$$

olduğundan tam hale dönüşmüş oldu. Çünkü

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-e^x$$

olur. Şimdi tam diferansiyel çözümü yapalım.

$$F(x,y)=\int(-e^x)dy+\phi(x)$$

$$F(x,y)=-e^xy+\phi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-e^xy+\frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$xe^x-ye^x=-e^xy+\frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\int xe^x\,dx=\phi(x)$$

Elde edilen integrale kısmi integrasyon yöntemi uygulayalım. $u=x$ ve $dv=e^x\,dx$ ise $du=dx$ ve $v=e^x$ dir.

$$xe^x-\int e^x\,dx=\phi(x)$$

$$e^x(x-1)+c=\phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y)=0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$-e^xy+e^x(x-1)+c=0$$

$$e^x(x-y-1)+c=0$$

bulunur.

Örnek: $y\,dx + (3 + 3x - y)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = y$ ve $N(x,y) = 3 + 3x - y$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

olup $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ tam diferansiyel değildir. Şimdi integral çarpanının hangi değişkene bağlı olduğunu bulalım.

$$\lambda(x,y) = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1-3}{-y} = \frac{2}{y}$$

$$\mu = e^{\int \lambda(x,y)dy} = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2\ln y} = y^2$$

integral çarpanı bulunur. Bu çarpan ile verilen denklemin iki tarafı çarpılırsa;

$$y^3\,dx + (3 + 3x - y)y^2 dy = 0$$

haline dönüşür. Bu durumda

$$M(x,y) = y^3 \text{ ve } N(x,y) = (3 + 3x - y)y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2$$

tam diferansiyel olduğu bulunur.

$$F(x,y) = \int y^3 dx + \phi(y)$$

$$F(x,y) = y^3 x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$3y^2 + 3xy^2 - y^3 = 3y^2 x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$\int (3y^2 - y^3)dy = \phi(y)$$

$$y^3 - \frac{y^4}{4} + c = \phi(y)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$y^3 x + y^3 - \frac{y^4}{4} + c = 0$$

bulunur.

Örnek: $(3x^2 + y + 3x^3 y)dx + x\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = 3x^2 + y + 3x^3 y$ ve $N(x,y) = x$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 3x^3, \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

olup $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ tam diferansiyel değildir. Şimdi integral çarpanının hangi değişkene bağlı olduğunu bulalım.

$$\lambda = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1+3x^3-1}{x} = 3x^2$$

$$\mu = e^{\int \lambda dx} = e^{\int 3x^2 \cdot dx} = e^{x^3}$$

integral çarpanı bulunur. Bu çarpan ile verilen denklemin iki tarafı çarpılırsa;

$$(3x^2 + y + 3x^3y)dx + x\,dy = 0$$

$$(3x^2 + y + 3x^3y)e^{x^3}dx + x\,e^{x^3}dy = 0$$

haline dönüşür. Bu durumda

$$M(x,y) = (3x^2 + y + 3x^3y)e^{x^3} \text{ ve } N(x,y) = x\,e^{x^3}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^3\,e^{x^3} + e^{x^3}$$

tam diferansiyel olduğu bulunur.

$$F(x,y) = \int x\,e^{x^3}dy + \phi(x)$$

$$F(x,y) = xy\,e^{x^3} + \phi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^3y\,e^{x^3} + ye^{x^3} + \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$3x^2e^{x^3} + ye^{x^3} + 3x^3ye^{x^3} = 3x^3y\,e^{x^3} + ye^{x^3} + \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\int 3x^2e^{x^3}dx = \phi(x)$$

Burada $u = x^3$ değişken değiştirmesi yapılırsa $du = 3x^2\,dx$ olup

$$\int e^u du = \phi(x)$$

$$e^u = \phi(x)$$

$$e^{x^3} + c = \phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$xy\,e^{x^3} + e^{x^3} + c = 0$$

olur.

Örnek: $[y^2(x+1) + y]dx + (2xy+1)\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz

Çözüm: $M(x,y) = y^2(x+1) + y$ ve $N(x,y) = 2xy + 1$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y(x+1) + 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

olup $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ tam diferansiyel değildir. Şimdi integral çarpanının hangi değişkene bağlı olduğunu bulalım.

$$\lambda = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2yx+2y+1-2y}{2xy+1} = 1$$

$$\mu = e^{\int \lambda dx} = e^{\int 1 \cdot dx} = e^x$$

olarak bulunur. Denklemi integral çarpanı ile çarpanı ile çarparsak

$$[y^2(x+1)+y]e^x dx + (2xy+1)e^x dy = 0$$

şekline dönüşür. Bu durumda

$$M(x,y) = [y^2(x+1)+y]e^x \text{ ve } N(x,y) = (2xy+1)e^x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xye^x + 2ye^x + e^x$$

tam hale dönüşür.

$$F(x,y) = \int (xy^2e^x + y^2e^x + ye^x)dx + \phi(y)$$

$$F(x,y) = xy^2e^x + ye^x + \phi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xye^x + e^x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$2xye^x + e^x = 2xye^x + e^x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$\int 0 \cdot dy = \phi(y)$$

$$c = \phi(y)$$

olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$xy^2e^x + ye^x + c = 0$$

olur.

Örnek: $(x^2 + y^2 + x)dx + xy\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = x^2 + y^2 + x$ ve $N(x,y) = xy$ ise

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

olup $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ tam diferansiyel değildir. Tam diferansiyel olması için λ'nın varlığını bulmaya çalışalım.

$$\lambda = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int \lambda dx} = e^{\int \frac{1}{x} \cdot dx} = x$$

integral çarpanı bulunur. Buna göre diferansiyel denklem

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y\,dy = 0$$

haline dönüşür.

$$M(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2 \text{ ve } N(x,y) = x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

tam diferansiyel denklemdir.

$$F(x,y) = \int (x^2y)dy + \phi(x)$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \phi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = xy^2 + \frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$x^3 + xy^2 + x^2 = xy^2 + \frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$\int (x^3 + x^2)dx = \phi(x)$$
$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c = \phi(x)$$
olur. Bu eşitlik $F(x, y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;
$$\frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c = 0$$
olur.

Örnek: $2xy\,dx + (y^2 - x^2 + 2)\,dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x, y) = 2xy$ ve $N(x, y) = y^2 - x^2 + 2$ ise
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$
olup $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ tam diferansiyel değildir. Şimdi integral çarpanının hangi değişkene bağlı olduğunu bulalım.
$$\lambda = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{2x - (-2x)}{-2xy} = -\frac{2}{y}$$
$$\mu = e^{\int \lambda dy} = e^{\int -\frac{2}{y} \cdot dy} = y^{-2}$$
olarak bulunur. Denklemi integral çarpanı ile çarpanı ile çarparsak
$$2xyy^{-2}\,dx + (y^2 - x^2 + 2)y^{-2}\,dy = 0$$
$$\frac{2x}{y}\,dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2} + \frac{2}{y^2}\right) dy = 0$$
şekline dönüşür. Bu durumda
$$M(x, y) = \frac{2x}{y} \text{ ve } N(x, y) = 1 - \frac{x^2}{y^2} + \frac{2}{y^2}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2}{y^2}$$
olduğundan tam hale dönüşmüş oldu.
$$F(x, y) = \int \frac{2x}{y} dx + \phi(y)$$
$$F(x, y) = \frac{x^2}{y} + \phi(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

$$1-\frac{x^2}{y^2}+\frac{2}{y^2}=-\frac{x^2}{y^2}+\frac{d\phi(y)}{dy}$$
$$\int\left(1+\frac{2}{y^2}\right)dy=\phi(y)$$
$$y-\frac{2}{y}+c=\phi(y)$$
olur. Bu eşitlik $F(x,y)=0$ denkleminde yerine yazılırsa;
$$\frac{x^2}{y}+y-\frac{2}{y}+c=0$$
olur.

Örnek: $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=-x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=-x$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}+x=0$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{2y+x^2}{x}=0$$
$$x\,dy=-(x^2+2y)dx$$
$$x\,dy+(x^2+2y)dx$$
denklemi elde edilir. Bu denklemin tam diferansiyel olup olmadığına bakalım.

$M(x,y)=x^2+2y$ ve $N(x,y)=x$ ise
$$\frac{\partial M}{\partial y}=2,\frac{\partial N}{\partial x}=1$$
olup $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir.
$$\lambda=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{2-1}{x}=\frac{1}{x}$$
$$\mu=e^{\int\lambda dx}=e^{\int\frac{1}{x}\cdot dx}=e^{\ln x}=x$$
olarak integral çarpanı bulunur. Denklemi integral çarpanı ile çarpanı ile çarparsak
$$x^2\,dy+(x^3+2xy)dx$$
Bu durumda

$M(x,y)=x^3+2xy$ ve $N(x,y)=x^2$
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$$
olduğundan tam diferansiyele dönüştü.
$$F(x,y)=\int x^2dy+\phi(x)$$
$$F(x,y)=x^2y+\phi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + \frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$x^3 + 2xy = 2xy + \frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$\int x^3 dx = \phi(x)$$
$$\frac{x^4}{4} + c = \phi(x)$$
olur. Bu eşitlik $F(x,y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;
$$x^2y + \frac{x^4}{4} + c = 0$$
olur.

Örnek: $(y + xy^2)dx - xdy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $M(x,y) = y + xy^2$ ve $N(x,y) = -x$ ise
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy, \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$
olup $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir.
$$\lambda = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-1-(1+2xy)}{-y-xy^2} = -\frac{2}{y}$$
$$\mu = e^{\int \lambda dx} = e^{\int -\frac{2}{y} \cdot dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2}$$
olarak integral çarpanı bulunur. Denklemi integral çarpanı ile çarpanı ile çarparsak
$$(y + xy^2)y^{-2}dx - xy^{-2}dy$$
$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0$$
Bu durumda
$$M(x,y) = \frac{1}{y} + x \text{ ve } N(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$
olduğundan tam diferansiyel denklemdir.
$$F(x,y) = \int -\frac{x}{y^2} dy + \phi(x)$$
$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \phi(x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{d\phi(x)}{dx}$$
$$\frac{1}{y} + x = \frac{1}{y} + \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\int x\,dx = \phi(x)$$

$$\frac{x^2}{2} + c = \phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x, y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c = 0$$

olur.

BİRİNCİ MERTEBEDEN DOĞRUSAL DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.7. Tanım: $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ ve $a(x) \neq 0$ biçiminde yazılan denklemlere birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem denir.

2.5. Teorem: $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ ve $a(x) \neq 0$ biçimindeki birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemde $P(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ ve $Q(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ alınırsa, denklemin çözümü

i) $c(x) = 0$ ise $y = ce^{-\int P(x)dx}$
ii) $c(x) \neq 0$ ise $y = e^{-\int P(x)\cdot dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]$

biçimindedir.

İspat: $a(x) \neq 0$ olmak üzere;

i) $c(x) = 0$ ise

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x)dx = 0$$

$$\ln y = \ln c - \int P(x)dx$$

$$y = ce^{-\int P(x)dx}$$

elde edilir.

ii) $c(x) \neq 0$ ise

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

olur. Bu durum

$$M(x,y) = P(x)y - Q(x) \text{ ve } N(x,y) = 1$$

denklemi elde edilir. Burada tam diferansiyel denklem olup olmadığına bakılır

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x), \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

olup $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam diferansiyel değildir.

$$\lambda = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{P(x) - 0}{1} = P(x)$$

$$\mu = e^{\int \lambda dx} = e^{\int P(x) \cdot dx}$$

olduğundan verilen denklem

$$[P(x)y - Q(x)]e^{\int P(x) \cdot dx}dx + e^{\int P(x) \cdot dx}dy = 0$$

$$M(x,y) = [P(x)y - Q(x)]e^{\int P(x) \cdot dx} \text{ ve } N(x,y) = e^{\int P(x) \cdot dx}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = P(x)e^{\int P(x) \cdot dx}$$

tam diferansiyel denklemi sağlar.

$$F(x,y) = \int e^{\int P(x) \cdot dx}dy + \phi(x)$$

$$F(x,y) = e^{\int P(x) \cdot dx}y + \phi(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x)y\, e^{\int P(x)\cdot dx} + \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$[P(x)y - Q(x)]e^{\int P(x)\cdot dx} = P(x)y\, e^{\int P(x)\cdot dx} + \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\int Q(x)e^{\int P(x)\cdot dx}dx = \phi(x)$$

olur. Bu eşitlik $F(x, y) = 0$ denkleminde yerine yazılırsa;

$$ye^{\int P(x)\cdot dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

$$y = e^{-\int P(x)\cdot dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right]$$

olur.

Örnek: $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklem birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemdir.

$$P(x) = -2x, Q(x) = x$$

ise

$$y = e^{-\int P(x)\cdot dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\, dx + c\right]$$

$$y = e^{-\int -2x\cdot dx}\left[\int x\, e^{\int -2xdx}\, dx + c\right]$$

$$y = e^{x^2}\left[\int x\, e^{-x^2}\, dx + c\right]$$

olur. Burada $u = x^2$ dönüşümü yapılırsa $du = 2x\, dx$ olacağından

$$y = e^{x^2}\left[\frac{1}{2}\int e^{-u}\, du + c\right]$$

$$y = e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right]$$

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}$$

olarak bulunur.

Örnek: $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ diferansiyel denklemini $y(-1) = 3$ şartı altında çözünüz.

Çözüm: $P(x) = 1, Q(x) = e^{-x}$

$$y = e^{-\int 1\cdot dx}\left[\int e^{-x}\, e^{\int 1\cdot dx}dx + c\right]$$

$$y = e^{-x}\left[\int e^{-x}\, e^{x}dx + c\right]$$

$$y = e^{-x}(x + c)$$

$y(-1) = 3$ şartı uygulanırsa

$$3 = e^{-(-1)}(-1 + c)$$

$$3e^{-1} + 1 = c$$

bulunur. Buna göre denklem

$$y = e^{-x}(x + 3e^{-1} + 1)$$

olur.

Örnek: $y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = \sin x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{1}{x}\right)y = \sin x$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = \sin x$$

olur. Burada

$$P(x) = \frac{1}{x}, Q(x) = \sin x$$

olduğundan

$$y = e^{-\int\frac{1}{x}\cdot dx}\left[\int \sin x\, e^{\int\frac{1}{x}dx}dx + c\right]$$

$$= e^{-\ln x}\left[\int \sin x\, e^{\ln x}dx + c\right]$$

$$= x^{-1}\left[\int x\sin x\, dx + c\right]$$

integralde $u = x, dv = \sin x\ dx$ ise $du = dx, v = -\cos x$ olur.

$$y = \frac{1}{x}\left[-x\ \cos x - \int \cos x\, dx + c\right]$$

$$y = \frac{1}{x}\left[-x\ \cos x + \sin x + c\right]$$

$$y = -\cos x + \frac{1}{x}\sin x + \frac{c}{x}$$

olarak bulunur.

Örnek: $e^x[y - 3(e^x + 1)^2]dx + (e^x + 1)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{e^x[y-3(e^x+1)^2]}{e^x+1}=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{e^xy-3e^x(e^x+1)^2}{e^x+1}=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{e^x}{e^x+1}y-3(e^x+1)=0$$

olur. Burada

$$P(x)=\frac{e^x}{e^x+1},Q(x)=3(e^x+1)$$

olduğundan

$$y=e^{-\int\frac{e^x}{e^x+1}\cdot dx}\left[3\int e^{\int\frac{e^x}{e^x+1}dx}(e^x+1)dx+c\right]$$

bulunur. Burada $u=e^x+1$ alınırsa $du=e^x\,dx$ olur.

$$\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{du}{u}=\ln u=\ln e^x$$

olacağından

$$y=e^{-\ln e^x}[3\int e^{\ln e^x}(e^x+1)dx+c]$$
$$y=3e^{-x}[\int e^x(e^x+1)dx+c]$$

bulunur. Burada $u=e^x+1$ alınırsa $du=e^x\,dx$ olur.

$$y=3e^{-x}[\int u\,du+c]$$
$$y=3e^{-x}\left[\frac{u^2}{2}+c\right]$$
$$y=\frac{3}{2}e^{-x}[(e^x+1)^2+c]$$

olur.

Örnek: $y'+\tan x\cdot y=x\sin 2x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx}+\tan x\cdot y=x\sin 2x$$

$$P(x)=\tan x,Q(x)=x\sin 2x$$

olduğundan

$$y=e^{-\int\tan x\cdot dx}[\int x\sin 2x\;e^{\int\tan x\,dx}dx+c]$$

bulunur. İntegrallerin birincisinde $u=\cos x$ ise $du=-\sin x\;dx$ olur.

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{-du}{u}=-\ln u=-\ln\cos x=\ln\frac{1}{\cos x}$$

Buna göre

$$y = e^{-\ln\frac{1}{\cos x}}\left[\int x \sin 2x \; e^{\ln\frac{1}{\cos x}} dx + c\right]$$
$$y = \cos x\left[\int x2 \sin x \cos x \; \frac{1}{\cos x} dx + c\right]$$
$$y = 2\cos x\,[\int x \sin x \, dx + c]$$
bulunur. Buradaki integral incelemek için $u = x, dv = \sin x \; dx$ ise $du = dx, v = -\cos x$ olur.
$$y = 2\cos x\,[-x\cos x - \int -\cos x \, dx + c]$$
$$y = 2\cos x\,[-x\cos x + \sin x + c]$$
$$y = 2\sin x \cos x - 2x\cos^2 x + 2c\cos x$$
$$y = \sin 2x - 2x\cos^2 x + 2c\cos x$$
elde edilir.

Örnek: $(y+1)\frac{dy}{dx} + (y^2 + 2y)x = x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $u = y^2 + 2y$ seçilirse $du = (2y+2)dy$ olur.

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + xu = x$$

$$\frac{du}{dx} + 2xu = 2x$$

$$P(x) = 2x, Q(x) = 2x$$
olduğundan
$$u = e^{-\int 2x\,dx}[\int 2x\, e^{\int 2x\,dx} dx + c]$$

$$y^2 + 2y = e^{-x^2}[\int 2x\, e^{x^2} dx + c]$$
bulunur. $t = x^2$ ise $dt = 2x\,dx$ olur.
$$y^2 + 2y = e^{-x^2}[\int e^t dt + c]$$

$$y^2 + 2y = e^{-x^2}[e^t + c]$$

$$y^2 + 2y = e^{-x^2}[e^{x^2} + c]$$

$$y^2 + 2y = 1 + ce^{-x^2}$$

bulunur.

Örnek: $(y+1)\frac{dy}{dx}+x^2(y^2+2y+5)=x^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $u=y^2+2y+5$ seçilirse $du=2(y+1)dy$ olur.

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx}+x^2u=x^2$$

$$\frac{du}{dx}+2x^2u=2x^2$$

$P(x)=2x^2, Q(x)=2x^2$

olduğundan

$$u=e^{-\int 2x^2\,dx}\left[\int 2x^2\,e^{\int 2x^2\,dx}dx+c\right]$$

$$y^2+2y+5=e^{-\frac{2}{3}x^3}\left[\int 2x^2e^{\frac{2}{3}x^3}\,dx+c\right]$$

bulunur. Burada $t=\frac{2}{3}x^3$ ise $dt=2x^2dx$ dönüşümü yapılırsa

$$y^2+2y+5=e^{-\frac{2}{3}x^3}\left[\int e^t dt+c\right]$$

$$y^2+2y+5=e^{-\frac{2}{3}x^3}\left[e^t+c\right]$$

$$y^2+2y+5=e^{-\frac{2}{3}x^3}\left[e^{\frac{2}{3}x^3}+c\right]$$

$$y^2+2y+5=1+ce^{-\frac{2}{3}x^3}$$

$$y^2+2y+4=ce^{-\frac{2}{3}x^3}$$

elde edilir.

Örnek: $\frac{dy}{dx}=e^{2x}+3y$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx}-3y=e^{2x}$

$P(x)=-3, Q(x)=e^{2x}$

olduğundan

$$y = e^{-\int -3\,dx}\left[\int e^{2x}\, e^{\int -3\,dx} dx + c\right]$$

$$y = e^{3x}\left[\int e^{2x}\, e^{-3x} dx + c\right]$$

$$y = e^{3x}\left[\int e^{-x}\, dx + c\right]$$

$$y = e^{3x}\left[-e^{-x} + c\right]$$

$$y = c\, e^{3x} - e^{2x}$$

elde edilir.

Örnek: $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\dfrac{dy}{dx} + 3y = x^2$

$$P(x) = 3, Q(x) = x^2$$

olduğundan

$$y = e^{-\int 3\,dx}\left[\int x^2\, e^{\int 3\,dx} dx + c\right]$$

$$y = e^{-3x}\left[\int x^2\, e^{3x} dx + c\right]$$

bulunur. Burada $u = x^2, dv = e^{3x}dx$ ise $du = 2x\,dx, v = \frac{1}{3}e^{3x}$ dönüşümü yapılırsa

$$y = e^{-3x}\left[x^2 \frac{1}{3}\, e^{3x} - \frac{2}{3}\int x\, e^{3x} dx + c\right]$$

elde edilir. Tekrar dönüşüm yapmak için $u = x, dv = e^{3x}dx$ alınırsa $du = dx, v = \frac{1}{3}e^{3x}$ olacağından

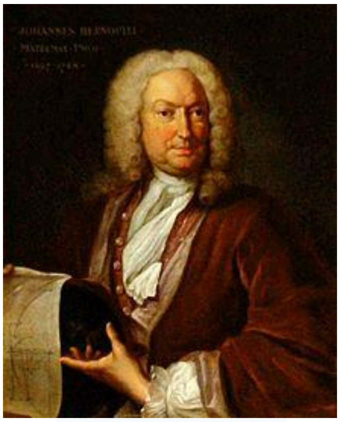
$$y = e^{-3x}\left[\frac{1}{3}x^2\, e^{3x} - \frac{2}{3}\left[x\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx\right] + c\right]$$

$$y = e^{-3x}\left[\frac{1}{3}x^2\, e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c\right]$$

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27} + ce^{-3x}$$

olur.

BERNOULLİ DENKLEMİ



Johann Bernoulli
06 Ağustos 1667 Basel, İsviçre - 01 Ocak 1748 Basel, İsviçre

2.8. Tanım: Birinci mertebeden bir bayağı diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = y^n\, Q(x)$$

biçiminde ise bu diferansiyel denkleme Bernoulli denklemi denir.

2.6. Teorem: Bernoulli denkleminde $u = y^{-n+1}$ dönüşümü yapılarak birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem haline dönüşür.

İspat:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = y^n\, Q(x)$$

$$\frac{1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^n} \cdot P(x)\, y = \frac{1}{y^n} \cdot y^n\, Q(x)$$

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)\, y^{-n+1} = Q(x)$$

Burada $u = y^{-n+1}$ dönüşümü yapılırsa $du = (-n+1)y^{-n}\, dy$ olur.

$$\frac{du}{(-n+1)dx} + P(x)\, u = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)\, u = (1-n)Q(x)$$

birinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklem haline dönüşür. // Burada

$$P_1(x) = (1-n)P(x), Q_1(x) = (1-n)Q(x)$$

olarak alınarak denklem çözümü yapılabilir.

Örnek: $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=-\frac{y^2}{x}$ Bernoulli diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=-\frac{y^2}{x}$

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{x}=-\frac{1}{x}$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-y^{-1}\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}$$

Burada $n=2, u=y^{-2+1}=y^{-1}$ dönüşümü yapılırsa $du=-y^{-2}dy$ olur.

$$-\frac{du}{dx}-u\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}+u\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

Birinci mertebeden doğrusal diferansiyel haline dönüşür.

$$P(x)=\frac{1}{x}, Q(x)=\frac{1}{x}$$

olduğundan

$$u=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{1}{x}\,e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right]$$

$$y^{-1}=e^{-\ln x}\left[\int\frac{1}{x}\,e^{\ln x}dx+c\right]$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\left[\int\frac{1}{x}\,x\,dx+c\right]$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{x}\left[x+c\right]$$

$$\frac{1}{y}=\frac{x+c}{x}$$

$$y=\frac{x}{x+c}$$

bulunur.

Örnek: $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=y^3x^{-2}$ Bernoulli diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=y^3x^{-2}$

$$\frac{1}{y^3}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y^3}\cdot\frac{2}{x}y=\frac{1}{y^3}\cdot y^3x^{-2}$$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y^{-2}=x^{-2}$$

Burada $n=3, u=y^{-3+1}=y^{-2}$ dönüşümü yapılırsa $du=-2y^{-3}dy$ olur.

$$-\frac{du}{2dx}+\frac{2}{x}u=x^{-2}$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{4}{x}u=-2x^{-2}$$

Birinci mertebeden doğrusal diferansiyel haline dönüşür.

$$P(x)=-\frac{4}{x}, Q(x)=-2x^{-2}$$

olduğundan

$$u=e^{-\int-\frac{4}{x}dx}\left[\int -2x^{-2}\,e^{\int-\frac{4}{x}dx}dx+c\right]$$

$$y^{-2}=e^{4\ln x}[\int -2x^{-2}\,e^{-4\ln x}dx+c]$$

$$y^{-2}=-2x^4[\int x^{-2}\,x^{-4}dx+c]$$

$$y^{-2}=-\frac{2}{5}x^4(x^{-5}+c)$$

$$y^{-2}=-\frac{2}{5}(x^{-1}+c\,x^4)$$

elde edilir.

Örnek: $x\frac{dy}{dx}+y=-2x^6y^4$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: $x\frac{dy}{dx}+y=-2x^6y^4$

$$xy^{-4}\frac{dy}{dx}+y^{-3}=-2x^6$$

$$y^{-4}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-3}=-2x^5$$

Burada $n=4, u=y^{-4+1}=y^{-3}$ dönüşümü yapılırsa $du=-3y^{-4}dy$ olur.

$$\frac{du}{-3dx} + \frac{1}{x}u = -2x^5$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{3}{x}u = 6x^5$$

Birinci mertebeden doğrusal diferansiyel haline dönüşür.

$$P(x) = -\frac{3}{x}, Q(x) = 6x^5$$

olduğundan

$$u = e^{-\int -\frac{3}{x}dx}\left[\int 6x^5\, e^{\int -\frac{3}{x}dx}dx + c\right]$$

$$y^{-3} = e^{3\ln x}\left[\int 6x^5\, e^{-3\ln x}dx + c\right]$$

$$y^{-3} = x^3\left[\int 6x^5\, x^{-3}dx + c\right]$$

$$y^{-3} = x^3\left[\int 6x^2\, dx + c\right]$$

$$y^{-3} = 2x^3[x^3 + c]$$

$$y^{-3} = 2x^6 + 2cx^3$$

bulunur.

Örnek: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = xy^{-3}$ diferansiyel denklemini $y(-1) = 2$ şartını sağladığına göre denklemi çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = xy^{-3}$$

$$y^3\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2x}y^4 = x$$

Burada $u = y^4$ dönüşümü yapılırsa $du = 4y^3dy$ olur.

$$\frac{du}{4dx} + \frac{1}{2x}u = x$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 4x$$

Birinci mertebeden doğrusal diferansiyel haline dönüşür.

$$P(x) = \frac{2}{x}, Q(x) = 4x$$

olduğundan

$$u = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left[\int 4x\, e^{\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right]$$

$$y^4 = e^{-2\ln x}\left[\int 4x\, e^{2\ln x}dx + c\right]$$

$$y^4 = x^{-2}\left[\int 4x\, x^2 dx + c\right]$$

$$y^4 = x^{-2}[x^4 + c]$$

$$y^4 = x^2 + cx^{-2}$$

elde edilir ve $y(1) = 2$ şartını kullanırsak

$$2^4 = (-1)^2 + c(-1)^{-2}$$

$$c = 15$$

olduğundan

$$y^4 = x^2 + \frac{15}{x^2}$$

elde edilir.

KAYNAKÇA

1. Doç. Dr. İhsan DAĞ, Bayağı Diferansiyel Denklemler, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1983.
2. Frank AYRES, Teori ve Problemlerle Diferansiyel Denklemler, Çeviri Doç. Dr. Ekrem PAKDEMİRLİ, Güven Kitapevi Yayınları, Ankara, 1978.
3. Arzu ERDEM, Adi Diferansiyel Denklemler, 2009-2010 Güz Dönemi Mühendislik Notları.
4. Yrd. Doç. Dr. Melek HAMZAOĞLU, Çözümlü Diferansiyel Denklemler, Marmara Üniversitesi Yayın No:661, İstanbul, 2000.
5. Fatma KARAKOÇ, Hüseyin BEREKETOĞLU, Ankara Üniversitesi Ders Notları, Ankara, 2022.
6. Arzu ÜNAL, Gizem SEYHAN ÖZTEPE, Ankara Üniversitesi Ders Notları, Ankara, 2022.