8.BÖLÜM
LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

8.1. Tanım: $f:(0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyon, $y = f(x)$ olmak üzere

$$L[y] = \int_0^\infty e^{-sx}\, y\, dx$$

İntegraline Laplace dönüşümü denir. Bu dönüşüm

$$L[y] = \int_0^\infty e^{-sx}\, y\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx}\, y\, dx$$

biçimindedir. L[y] gösterimi ihtiyaca binaen bazen L[f(x)] şeklinde gösterildiği gibi bazen F(s) şeklinde de gösterilir.

Burada ilk olarak dikkat çeken ifade verilen fonksiyonun x'nin tüm pozitif değerleri tanımlı olması halinde alınabilir. Mesela f(x); $0 \le x \le 10$ aralığında tanımlı, ancak $10 < x < \infty$ aralığında tanımsız ise, bu durumda integral alınamaz ve verilen fonksiyonun Laplace dönüşümü olmaz.

Laplace dönüşümüne ilişkin ikinci dikkat çeken nokta ise dönüştürülen f(x) fonksiyonunun x'ye bağlı olmaması, sadece s'nin fonksiyonu olmasıdır.

Örnek:

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{s^2}$

c) $f(x) = e^{ax}$

d) $f(x) = \cos ax$

fonksiyonların $x \ge 0$ için Laplace dönüşümlerini yapınız.

Çözüm: a)

a) $L[1] = \int_0^\infty e^{-sx}(1)\, dx$

$$L[1] = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} dx$$

$$L[1] = \lim_{R\to\infty} \frac{e^{-sx}}{s}\bigg|_0^R$$

$$L[1] = \lim_{R\to\infty} \frac{e^{-sR}}{s} - \frac{e^{0}}{s}$$

$$L[1] = \frac{1}{s}, \quad (s > 0)$$

b) $L[x] = \int_0^\infty e^{-sx}\, x\, dx$

$$L[x] = \lim_{R\to\infty} \int_0^R x\, e^{-sx} dx$$

$$L[x] = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{x\, e^{-sx}}{s^2} \right]_0^R + \frac{1}{s} \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} dx$$

bulunur. $s > 0$ için birinci terimin değeri sıfırdır. Dolayısıyla,

$$L[x] = \frac{1}{s^2}, \quad (s > 0)$$

elde edilir.

c) $L[e^{ax}] = \int_0^\infty e^{-sx}\, e^{ax}\, dx$

$$L[e^{ax}] = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} e^{ax} dx$$

$$L[e^{ax}] = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{(a-s)x} dx$$

$$L[e^{ax}] = \lim_{R\to\infty} \left. \frac{e^{(a-s)x}}{a-s} \right|_0^R$$

$$L[e^{ax}] = \lim_{R\to\infty} \frac{e^{(a-s)R}}{a-s} - \frac{e^{0}}{a-s}$$

$$L[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}, \quad (s > a)$$

d) $L[\cos ax] = \int_0^\infty e^{-sx} \cos ax \; dx$

$$L[\cos ax] = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} \cos ax\, dx$$

kısmi integrasyon iki defa uygulayarak (bkz. integral)

$$L[\cos ax] = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (s \cos ax + a \sin ax) \right]_0^R$$

$$L[\cos ax] = \lim_{R\to\infty} -\frac{e^{-sR}}{s^2+a^2}(s\cos aR + a\sin aR) + \frac{e^0}{s^2+a^2}(s\cos 0 + a\sin 0)$$

$$L[\cos ax] = \frac{s}{s^2-a^2}, \quad (s > 0) \;//$$

Bazı fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bölümün sonuna koyduk. Diğer soruları çözerken oradan bakılması gerekmektedir.

8.1. Not: Her f fonksiyonu için Laplace dönüşümü yoktur. $L[f(x)]$ dönüşümde integral varsa, dönüşüm de vardır. Buna göre $L[f(x)]$ dönüşümün olması için;

i) Verilen fonksiyon $x \geq 0$ için tanımlı olması

ii) Fonksiyon integrallenebilir yani tanımlı olduğu aralıkta sürekli fonksiyon olması

iii) İntegral yakınsak olması durumunda $L[f(x)]$ söz konusudur.

8.1. Teorem: $L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (s > n+1)$

İspat: $L[x^n] = \int_0^\infty e^{-sx}\, x^n\, dx$

$$L[x^n] = \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^n\, e^{-sx} dx$$

$$L[x^n] = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{x^n e^{-sx}}{s^2}\right]_0^R + \frac{n}{s}\lim_{R\to\infty}\int_0^R x^{n-1}\, e^{-sx} dx$$

bulunur. s pozitif olduğundan için birinci terimin değeri sıfırdır. Dolayısıyla,

$$L[x^n] = \frac{n}{s}\lim_{R\to\infty}\int_0^R x^{n-1}\, e^{-sx} dx$$

olur. Bu işlem n defa tekrarlanırsa

$$L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad (s > n+1)$$

elde edilir. // Buna göre mesela x^2 fonksiyonunun Laplace dönüşümünü;

$$L[x^2] = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2}{s^3}, \quad (s > 3)$$

olur.

8.2. Teorem: $L[x^n\, y]_s = (-1)^n \frac{d^n L[y]}{ds^n}$ dir.

İspat: $L[y] = \int_0^\infty e^{-sx}\, x^n\, dx$

$$\frac{d\, L[y]}{ds} = (-1)^1 \int_0^\infty e^{-sx} x\, y\, dx = L[x\, y]$$

$$\frac{d^2 L[y]}{ds^2} = (-1)^2 \int_0^\infty e^{-sx} x^2\, y\, dx = L[x^2\, y]$$

…

$$\frac{d^n L[y]}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-sx} x^n\, y\, dx = L[x^n\, y]$$

olur.

Örnek: $f(x) = x^2 \sin x$ in Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $u(x) = \sin x$ olarak alırsak

$$L[u(x)] = L[\sin x] = \frac{1}{s^2+1}$$

olur ki bu bize

$$L[f(x)] = L[x^2 \sin x] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2(3s^2-1)}{(s^2+1)^3}$$

olduğunu verir.

8.3. Teorem (Lineerlik Özelliği):

$$L[C_1 f(x) + C_2 g(x)] = C_1 L(f(x) + C_2 L[g(x)], \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C})$$

dir.

İspat: Laplace dönüşümü sonuçta belirli bir integraldir ve belirli bir integraller lineerlik özelliklerine sahiptir. Dolayısıyla Laplece dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

Örnek: k bir sabit olmak üzere sinh kt fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: Yukarıda $L[e^{kx}] = \frac{1}{s-k}$ olduğunu gösterildi. Analiz derslerinden $\sinh kx = \frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$
\begin{aligned}
L[\sinh kx] &= L\left[\frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}L[e^{kx}] - \frac{1}{2}L[e^{-kx}] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-(-k)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right) \\
&= \frac{k}{s^2-k^2}, \quad (s > k)
\end{aligned}
$$

olur.

8.4. Teorem (Ötelenme Özelliği): $L\left[e^{kx}\, y\right] = F(s-k)$

İspat:

$$L\left[e^{kx}\, y\right] = \int_0^\infty e^{-sx}e^{kx}\, y\, dx = \int_0^\infty e^{-(s-k)x}\, y\, dx = F(s-k)$$

Örnek: $e^{3x}\sinh ax$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: Yukarıdaki örnekte $\sinh ax = \frac{a}{s^2-a^2}$ olduğunu biliyoruz. $k = 3$ olduğu göz önüne alınırsa, verilen fonksiyonun Laplace dönüşümü;

$$L[e^{3x}\sinh ax] = \frac{a}{(s-3)^2-a^2} \qquad (s-3 > a)$$

elde edilir.

Örnek: $e^{-2x}\cos 3x$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \cos 3x$ ise $L[f(x)] = L[\cos 3x] = \frac{s}{s^2-3^2}$ olduğundan;

$$L[e^{-2x}\cos 3x] = \frac{s+2}{(s+2)^2-9} \qquad (s > 0)$$

elde edilir.

8.5. Teorem: $L\left[\frac{1}{x}y\right] = \int_s^\infty L[y]\, ds$

İspat: $L[y] = \int_0^\infty e^{-sx}\, y\, dx$ Laplace dönüşümünün her iki tarafın s ile ∞ arasında belirli integralini alalım:

$$\int_s^\infty L[y]\, ds = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-sx}\, y\, dx\right] ds$$

$$\int_s^\infty L[y]\, ds = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-sx}\, ds\right] y\, dx$$

Burada $\int_s^\infty e^{-sx}\, ds = \lim_{R\to\infty} \left.\frac{e^{-sx}}{-x}\right|_{s=s}^{\infty} = 0 - \frac{e^{-sx}}{-x} = \frac{e^{-sx}}{x}$ olduğundan, yukarıdaki denklem;

$$\int_s^\infty L[y]\, ds = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1}{x}\, y\, dx = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-sx}\, y\, dx = L\left[\frac{1}{x} y\right]$$

elde edilir.

Örnek: $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: Yukarıda $L[1] = \frac{1}{s}$ olduğu gösterildi ve 8.5. teoreminde $f(x) = 1$ alınırsa

$$L\left[\frac{1}{x}\cdot 1\right] = \int_s^\infty L[1] dx = \lim_{R\to\infty}\int_s^R \frac{1}{s} ds = \lim_{R\to\infty} \ln s\Big|_s^R = \lim_{R\to\infty} \ln R - \ln s = \infty$$

olur ki bu bize bu fonksiyonun Laplace dönüşümü olmadığını gösterir.

Örnek: $L\left[\frac{\sin 5x}{x}\right]$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $y = \sin 5x$ ve $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$ olduğu dikkate alınırsa

$$L\left[\frac{\sin 5x}{x}\right] = \int_s^\infty \frac{5}{x^2+25} dx = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{s}{3}$$

elde edilir.

8.6. Teorem (Ölçek Değişmesi Özelliği): $L\left[\int_0^x y\, dx\right] = \frac{1}{s} L[y]$

İspat: Laplace dönüşümünün tanımından

$$L\left[\int_0^x f(z) dz\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^x f(z) dz\right] e^{-sx}\, dx$$

yazabiliriz. İçerisindeki integrale, kısmi integral alınırsa

$$u = \int_0^x f(z) dz \text{ ve } dv = e^{-sx}\, dx$$

$$du = \int_0^t f(z) dz \text{ ve } v = -\frac{1}{s} e^{-sx}$$

bulunur. Bu denklemi integralde yerine yazılırsa

$$L\left[\int_0^x f(z)dz\right] = -\frac{1}{s}e^{-sx}\int_0^x f(z)dz\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$L\left[\int_0^x f(z)dz\right] = 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

$$L\left[\int_0^x f(z)dz\right] = \frac{1}{s}L[y]$$

elde edilir.

Örnek: $L[\int_0^x \sinh 2x\ \ dx]$ Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $L[\sinh 2x] = \frac{2}{s^2-4}$hesaplanabilir. O halde

$$L\left[\int_0^x \sinh 2x\ \ dx\right] = \frac{2}{s(s^2-4)}$$

bulunur.

BİRİM BASAMAK FONKSİYONU VE BU FONKSİYONUN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Oliver Heaviside
18 Mayıs 1850, Camden, Londra - 03 Şubat 1925, Torquay, Birleşik Krallık

8.2. Tanım: u bir integrallenebilir fonksiyon olmak üzere

$$u_c(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna birim basamak fonksiyonu veya Heaviside fonksiyonu denir. x değişkeni c kadar ötelenmesidir.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ x^2, & x \geq 3 \end{cases}$ f fonksiyonunun birim basamak fonksiyonu

$$u_c(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

olur. (Signum fonksiyonunu hatırlayınız.)

Örnek: $u_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$ ve $u_5(x) = \begin{cases} 0, & x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$

ise $u_2(x) + u_5(x)$ dir.

Çözüm: Parçalı fonksiyonlarda toplama işlemini hatırlarsak

$$u_2(x) + u_5(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 5 \\ 2, & x > 5 \end{cases}$$

olur.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$

fonksiyonunun birim basamak fonksiyonuna çeviriniz.

Çözüm: $f(x) = u_2(x) - u_4(x)$ olur. Çünkü;

$u_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$ ve $u_4(x) = \begin{cases} 0, & x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$

$$u_2(x) - u_4(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

dir.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x < 2 \\ 3, & x \geq 3 \end{cases}$

fonksiyonunun birim basamak fonksiyonuna çeviriniz.

Çözüm:

$$f(x) = -[u_{-1}(x) - u_0(x)] + [u_0(x) - u_1(x)] + 2[u_1(x) - u_2(x)] + +3[u_3(x)]$$

Örnek: $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2\cos x, & 1 \le x < 2 \\ 2\sin x, & x \ge 3 \end{cases}$
fonksiyonunun birim basamak fonksiyonuna çeviriniz.

Çözüm:
$$f(x) = x[u_{-1}(x) - u_0(x)] + x^2[u_0(x) - u_1(x)] + \\ +2\cos t\,[u_1(x) - u_2(x)] + 2\sin x\,[u_3(x)]$$

8.1. Sonuç: Bir f fonksiyonu üzerinde tanımlı birim basamak fonksiyonun Laplace dönüşümü
$$L[u_c(x)] = \int_c^\infty e^{-sx}\, y\, dx$$
şeklinde olur.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ x^2, & x \ge 3 \end{cases}$
fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm:
$$L[u_3(x)] = \int_3^\infty e^{-sx}\, x^2 dx$$
Alt limit 3 olduğundan, bunu tekrar 0 yapmak için $t = x - 3, dt = dx$ değişkenini tanımlayıp yerine yazalım:
$$\begin{aligned} L[u_3(x)] &= \int_3^\infty e^{-sx}\, x^2 dx \\ &= \int_0^\infty e^{-s(t+3)}(t+3)^2 dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(t+3)}(t^2 + 6t + 9) dt \\ &= e^{-3s}\int_0^\infty e^{-st}(t^2 + 6t + 9) dt \\ &= e^{-3s}\left[\int_0^\infty e^{-st} t^2 dt + \int_0^\infty e^{-st} 6t\, dt + \int_0^\infty e^{-st} 9\, dt\right] \\ &= e^{-3s}(L[t^2] + L[6t] + L[9]) \\ &= e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right) \end{aligned}$$
olur.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 5 \\ (x-5)^2, & x \ge 5 \end{cases}$
fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm:

$$L[u_5(x)] = \int_5^\infty e^{-sx}x^2dx$$

Alt limit 5 olduğundan, bunu tekrar 0 yapmak için $t = x - 5, dt = dx$ değişkenini tanımlayıp yerine yazalım:

$$\begin{aligned} L[u_5(x)] &= \int_5^\infty e^{-sx}x^2dx \\ &= \int_0^\infty e^{-s(t+5)}(t+5-5)^2dt \\ &= e^{-5s}\int_0^\infty e^{-st}t^2dt \\ &= e^{-5s}L[t^2] \\ &= e^{-5s}\frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

olur.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ 1, & 3 \le x < 5 \\ x, & x \ge 5 \end{cases}$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} &L[u_3(x)] - L[u_5(x)] + L[x \cdot u_5(x)] \\ &= e^{-3s}\int_0^\infty e^{-sx}\,dx - e^{-5s}\int_0^\infty e^{-sx}\,dx + \int_5^\infty e^{-sx}x\,dx \\ &= e^{-3s}L[1] - e^{-5s}L[1] + L[x] \\ &= \frac{e^{-3s}}{s} - \frac{e^{-5s}}{s} + \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Örnek: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2\pi \\ \sin x, & 2\pi \le x < 3\pi \\ 0, & x \ge 3\pi \end{cases}$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\begin{aligned} &L[\sin x \cdot u_{2\pi}(x)] - L[\sin x \cdot u_{3\pi}(x)] \\ &= e^{-2\pi s}\int_0^\infty e^{-sx}\sin x\;dx - e^{-3\pi s}\int_0^\infty e^{-sx}\sin x\;dx \\ &= e^{-2\pi s}L[\sin t] - e^{-3\pi s}L[\sin x] \\ &= \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} - \frac{e^{-3\pi s}}{s^2+1} \end{aligned}$$

PERİYODİK FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Periyodik fonksiyonlar trigonometri konusunda tanımlanmıştı. Her pozitif x değeri için $f(x+p) = f(x)$ eşitliğini sağlayan pozitif bir p sayısı varsa, $f(x)$

fonksiyonuna p periyotlu periyodik fonksiyon dendiğini hatırlayalım. Burada eşitliği sağlayan en küçük pozitif p sayısı olduğunu biliyoruz. Bu kısımda periyodik fonksiyonların Laplace dönüşümlerini inceleyelim. Bunun için şu teori kullanılır:

8.7. Teorem: $x > 0$ için $f(x)$, p periyotlu sürekli bir parçalı fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$L[y] = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-sx}\, y\, dx$$

ifadesinden bulunur ($s > 0$).

Örnek: $f(x) = \sin ax$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: $f(x) = \sin ax$ fonksiyonu, $p = \frac{2\pi}{a}$ periyotlu bir periyodik fonksiyondur. Buna göre

$$\begin{aligned}
L[y] &= \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-sx}\, y\, dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-(2\pi/a)s}} \int_0^p e^{-sx} \sin ax\, dx \\
&= \frac{1}{1-e^{-(2\pi/a)s}} \left[\frac{e^{-sx}(-s\sin ax - a\cos ax)}{s^2+a^2}\right]_{x=0}^{x=2\pi/a} \\
&= \frac{1}{1-e^{-(2\pi/a)s}} \cdot \frac{a\left(1-e^{-(2\pi/a)s}\right)}{s^2+a^2} \\
&= \frac{a}{s^2+a^2}
\end{aligned}$$

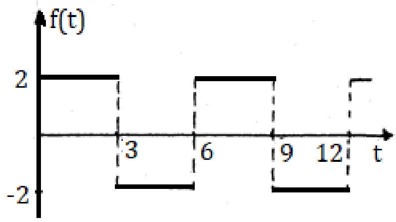
elde edilir.

Örnek: $p = 6$ periyotlu

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 3 \\ -2, & 3 \le x < 6 \end{cases}$$

fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



$$L[y] = \frac{1}{1-e^{-ps}} \int_0^p e^{-sx}\, y\, dx$$

$$= \frac{1}{1-e^{-6s}}\left[\int_0^3 e^{-sx}2dx + \int_3^6 e^{-sx}(-2)dx\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-6s}}\left[2\left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)\Bigg|_0^3 - 2\left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)\Bigg|_3^6\right]$$

$$= \frac{2(1-2e^{-3s}+e^{-6s})}{s(1-e^{-6s})}$$

$$= \frac{2(1-e^{-3s})}{s(1-e^{-6s})}$$

$$= \frac{2}{s}\tanh 3s$$

8.2. Not (Alternatif Çözüm): Genel olarak periyodun pozitif yüksekliği a olan p periyotlu bir fonksiyonunun Laplace dönüşümü şu şekilde verilir:

$$f(x) = \begin{cases} a, & 0 \le x < p/2 \\ -a, & p/2 \le x < p \end{cases}$$

ve

$$L[y] = \frac{a(1-e^{-ps/2})}{s(1+e^{-ps/2})} = \frac{2}{s}\tan\frac{ps}{2} = \frac{a}{s}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-pns/2}\right]$$

Verilen denklemin periyot uzunluğu $a = 2$ ve periyodu $p = 6$ dır. Dolayısıyla yukarıdaki denklemden

$$f(x) = 2\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(x-3n)\right]$$

ve bunun Laplace dönüşümü

$$L[y] = 2\left[L[1] + L\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(x-3n)\right]\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{s}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{-3ns}}{s}\right]$$

$$= \frac{2}{s}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-3ns}\right]$$

olarak elde edilir.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE GAMA FONKSİYONU ARASINDAKİ İLİŞKİ

8.8. Teorem: $y = x^n$ için $\Gamma(n+1) = L[x] \cdot s^{n+1}$ olur.

İspat:

$$L[x] \cdot s^{n+1} = s^{n+1} \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx}\, x^n\, dx$$

Burada $u = sx$ dönüşümü uygulanırsa $\frac{1}{s} du = dx$ olacağından

$$\begin{aligned} L[x] \cdot s^{n+1} &= s^{n+1} \cdot \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^n \frac{1}{s}\, du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^n\, du \\ &= \Gamma(n+1) \end{aligned}$$

bulunur.

TÜREVLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Şimdi de "Laplace dönüşümü diferansiyel denklemerde nasıl kullanılır?" sorusunun cevabını arayalım.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun n-inci türevinin Laplace dönüşümü, integralin yakınsaması halinde;

$$L\left[f^{(n)}\, y\right] = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, y^{(n)} dx$$

olarak bulunur.

8.9. Teorem (Birinci Türevin Laplace Dönüşümü): $x \geq 0$ olmak üzere $f'(x)$ türevi en azından parçalı sürekli bir fonksiyon ise, bu türevin Laplace dönüşümü;

$$L[y'] = s\, L[y] - y(0)$$

olarak ifade edilir. (Burada $L[y]$, y fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $y(0)$ ise $x = 0$ noktasında bu fonksiyonun değeridir. Eğer bu noktada fonksiyon sürekli değilse, bu durumda $y(0) = y(0+)$, yani sağdan limit değeri alınır.)

İspat:

$$\begin{aligned} L[y'] &= \int_0^{\infty} e^{-sx}\, y' dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-sx}\, y'\, dx \\ &= \lim_{R\to\infty} -e^{-sx}\, y\Big|_0^R + s\int_0^R e^{-sx}\, y\, dx \\ &= s\, L[y] - y(0) \end{aligned}$$

8.10. Teorem (İkinci ve n-inci Türevin Laplace Dönüşümü): $x \geq 0$ olmak üzere y ve y' sürekli bir fonksiyon ve y'' türevi en azından parçalı sürekli bir fonksiyon ise, bu durumdan ikinci türevin Laplace dönüşümü;

$$L[y''] = s^2L[y] - s\,y(0) - y'(0)$$

biçimindedir. Benzer şekilde n-inci türevin Laplace dönüşümü ise;

$$L\left[y^{(n)}\right] = s^nL[y] - s^{n-1}\,y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

şeklinde olur.

Bu teoremin ispatı 8.8. teoremine benzer şekilde yapılacağından okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümlerini yapınız ve bulduğunuz cebirsel ifadeden $\mathbf{L[y]}$ fonksiyonunu bulunuz.

a) $y'' - 2y' + 3y = 0$
b) $y' = \mathbf{t\,e^{3t} + 2}$

Çözüm:
a) $L[y'' - 2y' + 3y] = L[0]$

$$L[y''] - 2L[y'] + 3L[y] = 0$$

$$(s^2L[y] - s\,y(0) - y\,'(0)) - 2(sL[y] - y(0)) + 3L[y] = 0$$

$$s^2L[y] - s\,y(0) - y\,'(0) - 2sL[y] + 2y(0) + 3L[y] = 0$$

$$L[y](s^2 - 2s + 3) = (s-2)\,y(0) - y'(0)$$

$$L[y] = \frac{(s-2)\,y(0) - y'(0)}{(s^2 - 2s + 3)}$$

b) $L[y'] = L[t\,e^{3t} + 2]$

$$L[y'] = L[t\,e^{3t}] + L[2]$$

$$s\,L[y] - f(0) = \frac{1}{(s-3)^2} + \frac{2}{s}$$

$$L[y] = \frac{1}{s(s-3)^2} + \frac{2}{s^2} + \frac{f(0)}{s}\ //$$

Buraya kadar Laplace dönüşümü ile diferansiyel denklem çözmek için temel teşkil etmeye çalıştık. Bunun için burada ters Laplace dönüşümü tanımlayacağız, arkasından ters Laplace özelliklerini vereceğiz.

TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

8.3. Tanım: Laplace dönüşümü $L[f(x)] = F(s)$ sembolleri ile gösterilmişti. Bu gösterim ters fonksiyon tanımı gereği $L^{-1}[F(s)] = f(x)$ biçiminde yazılabilir. Bu yazıma ters Laplace dönüşümü adı verilir. Ters Laplace sembolünü kısaca $L^{-1}[Y]$ biçiminde göstereceğiz.

Örnek: $L[x] = \frac{1}{s^2}$ olduğunu bildiğimize göre $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = x$ dir.

Örnek: $L[e^{5x}] = \frac{1}{s-5}$ olduğunu bildiğimize göre $L^{-1}\left[\frac{1}{s-5}\right] = e^{5x}$ dir.

8.11. Teorem (Lineerlik Özelliği):

$$L^{-1}[C_1F(s) + C_2G(s)] = C_1L^{-1}[F(s)] + C_2L^{-1}[G(s)], \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{C})$$

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek:
$$L^{-1}\left[\frac{5}{s} - \frac{4}{s-3}\right] = 5L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 4L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] = 5 - 4e^{3x}$$

Örnek:
$$L^{-1}\left[\frac{3s+2}{s^2-3s+2}\right] = L^{-1}\left[\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}\right]$$
şekliden basit kesirlere ayılırsa, $A = -5$ ve $B = 8$ bulunur.
$$\frac{3s+2}{s^2-3s+2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = -\frac{5}{s-1} + \frac{8}{s-2}$$
O halde ters Laplace dönüşümünün lineerlik özelliğinden

$$L^{-1}\left[\frac{3s+2}{s^2-3s+2}\right] = 8L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - 5L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{3s+2}{s^2-3s+2}\right] = 8L^{-1}\left[\frac{8}{s-2}\right] - 5L^{-1}\left[\frac{5}{s-1}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{3s+2}{s^2-3s+2}\right] = 8e^{2x} - 5e^{x}$$

bulunur.

8.12. Teorem: $L^{-1}[F(s-k)] = e^{kx}L^{-1}[F(s)]$ dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek:

$$L^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2-a^2}\right] = e^{-3x}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-a^2}\right] = e^{-3x}\cosh ax$$

8.13. Teorem: $L^{-1}[s\,F(s)] = \frac{d}{dx}L^{-1}[F(s)]$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek:

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right] = L^{-1}\left[s\cdot\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{d}{dx}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\ 3x}{3}\right) = \cos 3x$$

8.14. Teorem: $L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^x [F(s)]\,dx$ dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek:

$$L^{-1}\left[\frac{6}{s(s-2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{6}{s-2}\right)\right] = \int_0^x L^{-1}\left[\frac{6}{s-2}\right] = 6\int_0^x e^{2x}dx = 3e^{2x} - 3$$

8.15. Teorem: $L^{-1}\left[\frac{d^n F(s)}{ds^n}\right] = (-x)^n L^{-1}[F(s)]$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek:

$$L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = L^{-1}\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s}\right)\right] = (-x)^2 L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = x^2 \cdot 1 = x^2$$

8.16. Teorem: $L^{-1}[e^{-cs}F(s)] = u(x-c)f(x-c)$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek:

$$L^{-1}\left[\frac{2e^{-3s}}{s^3}\right] = u(x-3)L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] = u(x-3)(x-3)^2$$

8.17. Teorem: $L^{-1}[F(ks)] = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right)$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek:

$$L^{-1}\left[\frac{5s}{25s^2+9}\right] = L^{-1}\left[\frac{5s}{(5s)^2+3^2}\right] = \frac{1}{5}\cos\frac{3x}{5}$$

8.4. Tanım: Eğer iki fonksiyonun Laplace dönüşümleri aynı ise, bu iki fonksiyon da birbirinin eşdeğeridir.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

Laplace dönüşümü ile yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemler çözümleri mevcuttur. Şimdi örneklerle anlamaya çalışalım.

Örnek: $y'' - 2y' - 8y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 6$
diferansiyel denklemini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü alınırsa
$$L[y''] - 2L[y'] - 8L[y] = 0$$
bulunur. 8.10. teorem gereği
$$L[y'] = sL[y] - y(0) = sL[y] - 3$$
$$L[y''] = s^2L[y] - s\,y(0) - y'(0) = s^2L[y] - 3s - 6$$
olduğundan
$$(s^2L[y] - 3s - 6) - 2(\mathbf{s}L[y] - \mathbf{3}) - 8L[y] = 0$$

$$L[y](s^2 - 2s - 8) - 3s - 6 + 6 = 0$$

$$L[y] = \frac{3s}{s^2-2s-8} = \frac{3s}{(s-4)(s+2)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+2}$$

$$3s = (A + B)s + (2A - 4B)$$
elde edilir. Buradan $A = 2$ ve $B = 1$ bulunarak
$$L[y] = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}$$
eşitliği oluşur. Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Laplace tablosundan
$$y = 2L^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

$$y = 2\,e^{4x} + e^{-2x}$$
elde edilir.

Örnek: $y'' - y - 1 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
diferansiyel denklemini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü alınırsa
$$L[y''] - L[y] - L[1] = 0$$
bulunur. 8.10. teorem gereği
$$L[y''] = s^2L[y] - s\,y(0) - y'(0) = s^2L[y] - s - 0$$
olduğundan
$$s^2L[y] - s - L[y] - \frac{1}{s} = 0$$

$$L[y](s^2 - 1) = s + \frac{1}{s}$$

$$L[y] = \frac{1+s^2}{s(s^2-1)} = \frac{As+B}{s^2-1} + \frac{C}{s}$$

$$s^2 + 1 = A\,s^2 + Bs + Cs^2 - C = (A + C)s^2 + Bs + C$$

elde edilir. Buradan $A = 2, B = 0$ ve $C = -1$ bulunarak

$$L[y] = \frac{2s}{s^2-1} - \frac{1}{s}$$

eşitliği oluşur. Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Laplace tablosundan

$$y = 2L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$y = -1 + 2\cosh x$$

elde edilir.

Örnek: $y''' - y' = e^{-x}, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

diferansiyel denklemini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü alınırsa

$$L[y'''] - L[y'] = L[e^{-x}]$$

bulunur. 8.10. teorem gereği

$$L[y'] = sL[y] - y(0) = sL[y]$$

$$L[y'''] = s^3L[y] - s^2\,y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3L[y]$$

olduğundan

$$s^3L[y] - sL[y] = L[e^{-x}]$$

$$L[y](s^3 - s) = \frac{1}{s+1}$$

$$L[y] = \frac{1}{s(s-1)(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

bulunur. Burada $A = \frac{4}{3}, B = -1, C = -\frac{1}{3}, D = \frac{2}{3}$ olur.

$$L[y] = \frac{4}{3s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{3(s+1)} + \frac{2}{3(s+1)^2}$$

Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Laplace tablosundan

$$y = \frac{4}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{2}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]$$

$$y = \frac{4}{3} - e^{x} - \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{2}{3}xe^{-x}$$

olur.

Örnek: $y''' - y'' - 6y' = 6, y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3$
diferansiyel denklemini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü alınırsa
$$L[y'''] - L[y''] - 6L[y'] = L[6]$$
bulunur. 8.10. teorem gereği
$$L[y'] = sL[y] - y(0) = sL[y]$$
$$L[y''] = s^2L[y] - s\,y(0) - y'(0) = s^2L[y]$$
$$L[y'''] = s^3L[y] - s^2\,y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3L[y] - 3$$
olduğundan
$$s^3L[y] - 3 - s^2L[y] - 6sL[y] = \frac{6}{s}$$
$$L[y](s^3 - s^2 - 6s) = \frac{6}{s} + 3$$
$$L[y] = \frac{3s+6}{s^2(s^2-s-6)}$$
$$L[y] = \frac{3s+6}{s^2(s^2-s-6)} = \frac{3(s+2)}{s^2(s-3)(s+2)} = \frac{3}{s^2(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3}$$
bulunur. Burada $A = -\frac{1}{3}, B = -1, C = \frac{1}{3}$ olur.
$$L[y] = -\frac{1}{3s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{3(s-3)}$$
Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa Laplace tablosundan
$$y = -\frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]$$
$$y = -\frac{1}{3} - x + \frac{1}{3}e^{3x}$$
denklemin çözümü elde edilir.

Örnek: $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}, y(0) = 4, \; y'(0) = 2$
diferansiyel denklemini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü alınırsa
$$L[y''] + 2L[y'] + L[y] = 3L[te^{-x}]$$
bulunur. Burada
$$L[y'] = sL[y] - y(0) = sL[y] - 4$$
$$L[y''] = s^2L[y] - s\,y(0) - y'(0) = s^2L[y] - 4s - 2$$
$$L[te^{-x}] = \frac{1}{(s+1)^2}$$
olduğundan

$$(s^2L[y]-4s-2)+2(sL[y]-4)+L[y]=\frac{3}{(s+1)^2}$$

$$L[y](s^2+2s+1)+(-4s-2-8)=\frac{3}{(s+1)^2}$$

$$L[y]=\frac{4s^3+18s^2+24s+13}{(s+1)^4}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+1)^3}+\frac{C}{(s+1)^4}$$

bulunur. Burada $A=4, B=6, C=0, D=3$ olur.

$$L[y]=\frac{4}{s+1}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y=4L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+6L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]+3L^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^4}\right]$$

$$y=4e^{-x}+6xe^{-x}+\frac{1}{2}x^3e^{-x}=e^{-x}(4+6x+\frac{1}{2}x^3)$$

denklemin çözümü elde edilir.

Örnek: $y''-4y'+4y=4\cos 2x, y(0)=2, \; y'(0)=5$
diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü alınırsa

$$L[y'']-4L[y']+4L[y]=4L[\cos 2x]$$

bulunur. Burada

$$L[y']=sL[y]-y(0)=sL[y]-2$$
$$L[y'']=s^2L[y]-s\,y(0)-y'(0)=s^2L[y]-2s-5$$
$$L[\cos 2x]=\frac{s}{s^2+4}$$

olduğundan

$$(s^2L[y]-2s-5)-4(sL[y]-2)+4L[y]=\frac{4s}{s^2+4}$$

$$L[y](s^2-4s+4)=\frac{4s}{s^2+4}+2s-3$$

$$L[y]=\frac{4s}{(s^2+4)(s-2)^2}+\frac{2s-3}{(s-2)^2}$$

olur. Burada

$$\frac{4s}{(s^2+4)(s-2)^2}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

basit kesirlere ayırma çözülürse $A=0, B=1, C=0, D=-1$ dir. Ayrıca

$$\frac{2s-3}{(s-2)^2}+\frac{E}{s-2}+\frac{F}{(s-2)^2}$$

basit kesirlere ayırma çözülürse $E=2, F=1$dir. Bulunan bu değerleri yerine yazılırsa

$$L[y]=\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{s^2+4}+\frac{2}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}$$

olur. Her iki tarafa ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]+2L^{-1}\left[\frac{2}{s-2}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]$$

$$y=2xe^{2x}-\frac{1}{2}\sin 2t+2e^{2x}$$

elde edilir.

Örnek: $y''-y'-2y=\sin x\,, y(0)=y'(0)=0$
diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$L[y'']-L[y']-2L[y]=L[\sin x]$$

bulunur. Burada

$$L[y']=sL[y]-\ y(0)=sL[y]$$
$$L[y'']=s^2L[y]-s\,y(0)-y'(0)=s^2L[y]$$
$$L[\cos 2x]=\frac{1}{s^2+1}$$

olduğundan

$$s^2L[y]-sL[y]-2L[y]=\frac{1}{s^2+1}$$

$$L[y](s^2-s-2)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$L[y]=\frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s-2)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

bulunur. Basit kesirlere ayırma çözülürse $A=\frac{1}{15}, B=-\frac{1}{6}, C=\frac{1}{10}, D=-\frac{3}{10}$ olur. Buna göre

$$L[y]=\frac{1}{15(s-2)}+\frac{1}{16(s+1)}+\frac{s}{10(s^2+1)}-\frac{3}{10(s^2+1)}$$

$$y=\frac{1}{15}L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\frac{1}{6}L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\frac{1}{10}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]-\frac{3}{10}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$y=\frac{1}{15}e^{2x}-\frac{1}{6}e^{-x}+\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x$$

elde edilir.

KONVOLÜSYON TEOREMİ

8.5. Tanım: f(x) ve g(x) birer fonksiyon olmak üzere

$$f \star g = \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

integraline konvolüsyon denir.

Örnek: Aşağıda değerleri verilen f(x) ve g(x) fonksiyonlarının $f(x) \star g(x)$ konvolüsyonunu bulunuz.

a) $f(x) = g(x) = x$
b) $f(x) = x, g(x) = x^2$
c) $f(x) = e^{3x}, g(x) = e^{2x}$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{a) } f \star g &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_0^x t(x-t)dt \\ &= x\int_0^x t\,dt - \int_0^x t^2\,dt \\ &= \frac{x^3}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f \star g &= \int_0^x (x-t)\,t\,dt \\ &= \int_0^x (xt^2 - t^3)dt \\ &= x\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\Big|_0^x \\ &= \frac{x^4}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f \star g &= \int_0^x e^{3t}e^{2(x-t)}dt \\ &= e^{2x}\int_0^x e^t\,dt \\ &= e^{2x}e^t\Big|_0^x \\ &= e^{3x} - e^{2x} \end{aligned}$$

8.18. Teorem:

a) $f \star g = g \star f$

b) $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$

c) $f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

8.19. Teorem (Konvolüsyon Teoremi): $L[f(x)] = F(s)$ ve $L[g(x)] = G(s)$ olsun. Bu durumda

i) $L[f(x) \star g(x)] = F(s)G(s)$

ii) $L^{-1}[F(s)G(s)] = f(x) \star g(x)$

dir.

Bu teoremin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların ters Laplace dönüşümlerini konvolüsyon teoremini kullanarak bulunuz.

a) $\frac{1}{s(s+3)}$

b) $\frac{1}{s(s^2+4)}$

c) $\frac{4}{s^2(s-2)}$

d) $\frac{1}{(s^2+1)^2}$

Çözüm:

a) $F(s) = \frac{1}{s}, G(s) = \frac{1}{s+3}$ olarak alınırsa

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1, L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = e^{-3x}$$

olduğundan

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = f(x) \star g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+3)}\right] = \int_0^x 1 \cdot e^{-3t}dt = \frac{1}{3}(1 - e^{-3x})$$

bulunur.

b) $F(s)=\frac{1}{s}, G(s)=\frac{1}{s^2+4}$ olarak alınırsa

$L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1, L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]=\frac{1}{2}\sin 2t$

olduğundan

$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right]=\int_0^x 1\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\,dt=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$

bulunur.

c) $F(s)=\frac{4}{s^2}, G(s)=\frac{1}{s-2}$ olarak alınırsa

$L^{-1}\left[\frac{4}{s^2}\right]=4\cdot L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=4x, L^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]=e^{2x}$

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{4}{s^2(s-2)}\right]&=\int_0^x 4(x-t)\cdot e^{2t}dt\\
&=\int_0^x 4x\cdot e^{2t}dt-\int_0^x 4t\cdot e^{2t}dt\\
&=2x(e^{2x}-1)-4\left[\frac{1}{2}te^{2t}\Big|_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}dt\right]\\
&=2xe^{2x}-2x-2xe^{2x}+(e^{2x}-1)\\
&=e^{2x}-2x-1
\end{aligned}$$

bulunur.

d) $F(s)=\frac{1}{s^2+1}, G(s)=\frac{1}{s^2+1}$ olarak alınırsa

$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=\sin x$

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]&=\int_0^x \sin t\cdot\sin(x-t)\,dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^x[\cos(2t-x)-\cos x]dt\\
&=\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)
\end{aligned}$$

bulunur.

Bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri

f(t)	**L(f)**
1	$\frac{1}{s}$
x	$\frac{1}{s^2}$
x^a , $(a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$x^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
x^2	$\frac{2}{s^3}$
$x^n, n = 1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
$x^n e^{ax}, n = 1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-k)^{n+1}}$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$e^{kx}\sin ax$	$\frac{a}{(s-k)^2+a^2}$
$x\sin ax$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{kx}\cos ax$	$\frac{s-k}{(s-k)^2+a^2}$
$x\cos ax$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

KAYNAKÇA

1. Yrd. Doç. Dr. Melek HAMZAOĞLU, Marmara Üniversitesi Yayın No: 661, İstanbul, 2000.

2. Prof. Dr. Yunus A. ÇENGEL, Doç. Dr. Tahsin ERGİN, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, 2008.
3. Doç. Dr. İhsan DAĞ, Bayağı Diferansiyel Denklemler, Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, 1983.
4. Arzu ERDEM, Adi Diferansiyel Denklemler, 2009-2010 Güz Dönemi Mühendislik Notları.
5. Fatma KARAKOÇ, Hüseyin BEREKETOĞLU, Ankara Üniversitesi Ders Notları, Ankara, 2022.
6. Arzu ÜNAL, Gizem SEYHAN ÖZTEPE, Ankara Üniversitesi Ders Notları, Ankara, 2022.