1. BÖLÜM
TOPOLOJİYE GİRİŞ

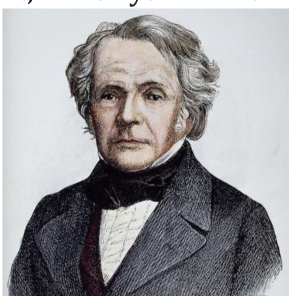
TOPOLOJİ KAVRAMI ve TARİHÇESİ

Topoloji Yunancada yüzey veya yer anlamına gelen “topos” ve bilim anlamına gelen “logos” kelimelerinden türetilmiştir.

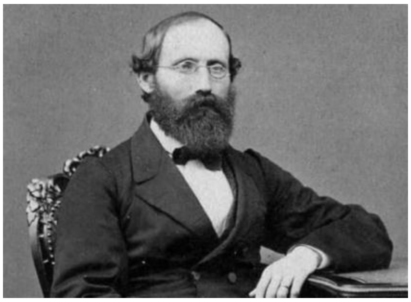
Sayı düzeni, koordinat sistemleri, bağıntı, fonksiyon, geometrik şekiller birer kümelerdir. Bu kümelerin genel hali nasıl olur ve tanımlanan bu matematiksel ifadeler genel durumda hangi küme üzerinde tanımlanmalıdır? Bu sorunun cevabı topoloji kavramı vermektedir. Yani kabaca tanımlayacak olursak topoloji matematiksel ifadelerin tanımlandığı en anlamlı kümelerdir.

Topoloji kelimesini ilk kez 1847’de Alman matematikçi Johann Benedict Listing kullanmıştır. Johann Listing’in asistanı 1858 yılında Augustus Ferdinand Möbius önemli çalışmalar yapmıştır.

Johann Benedict Listing
25 Temmuz 1808, Frankfurt, Almanya-24 Aralık 1882, Göttingen, Almanya



Augustus Ferdinand Möbius
17 Kasım 1790, Naumburg, Almanya-26 Eylül 1868, Leipzig, Almanya

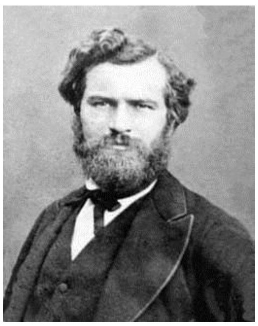


Georg Friedrich Bernhard Riemann
17 Eylül 1826, Hannover Krallığı - 20 Temmuz 1866, Verbania, İtalya

1851 yılında Doktora tez danışmanı Gauss olan Alman matematikçi Georg Friedrich Bernhard Riemann doktora tezinde topolojik düşünceleri Analize uyarlamıştır.

Christian Felix Klein
25 Nisan 1849, Düsseldorf, Almanya - 22 Haziran 1925, Göttingen, Almanya

1872 yılında Alman matematikçi Christian Felix Klein, geometriler arasında topolojiyi ele almıştır.



Marie Ennemond Camille Jordan
05 Ocak 1838, Lyon, Fransa - 22 Ocak 1922, Paris, Fransa

1882 yılında Fransız matematikçisi Marie Ennemond Camille Jordan, Jordan eğri teoremini olarak bilinen teoremi ortaya koymuştur.

Jules Henri Poincare
29 Nisan 1854, Nancy, Fransa - 17 Temmuz 1912, Paris, Fransa

1895 yılında Fransız matematikçisi Jules Henri Poincare, önemli çalışmalar yapmış ve modern topolojinin babası olarak bilinmektedir. Ayrıca topolojinin çeşitli alanlara uygulamaların yapan ilk matematikçidir.

Başta Henri Poincare'in araştırmaları ile birlikte topoloji 1960'lı yıllarda zirve yapmış ancak giderek daha soyut bir hal almaya başlamıştır.

Şimdi buraya kadar izah edilen topolojiyi matematiksel olarak izah edelim.

1.1. Tanım: X boştan farklı herhangi bir küme olsun. X'in alt kümelerinin kümesini olan kuvvet kümesini P(X) gösterelim. Ayrıca τ'da, $\tau \subseteq P(X)$ olsun.

(T1) $\emptyset,\ X \in \tau$
(T2) τ'nun sonlu sayıda elemanlarının arakesiti τ'ya aittir.
(T3) τ'nun herhangi sayıda (sonlu-sonsuz) elemanlarının birleşkesi τ'ya aittir. Yani,

$$\text{Her } i \in I \text{ için } U_i \in \tau \text{ ise } \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$$

aksiyomları var ise τ kümesine X kümesi üzerinde topoloji denir, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir. (X, τ) ikilisini kısaca X şeklinde göstereceğiz.

1.1. Not: (T3) aksiyomundan $\emptyset \in \tau$ önermesi daima vardır. Gerçekten $I = \emptyset$ alınarak, $\emptyset = \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ elde edilir.

Örnek: $X=\{a,b,c\}$ olmak üzere X'in kuvvet kümesinin bir alt kümesi;

$$\tau=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

şeklindedir. (X,τ) topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (T1) $\varnothing,\ \{a,b,c\}\in\tau$ dir.

(T2) $\varnothing\cap\{a\}=\varnothing\in\tau$

$\varnothing\cap\{a,b\}=\varnothing\in\tau$

$\varnothing\cap\{a,b,c\}=\varnothing\in\tau$

$\varnothing\cap\{a\}\cap\{a,b\}=\varnothing\in\tau$

$\varnothing\cap\{a\}\cap\{a,b,c\}=\varnothing\in\tau$

$\varnothing\cap\{a,b\}\cap\{a,b,c\}=\varnothing\in\tau$

$\varnothing\cap\{a\}\cap\{a,b\}\cap\{a,b,c\}=\varnothing\in\tau$

$\{a\}\cap\{a,b\}=\{a\}\in\tau$

$\{a\}\cap\{a,b,c\}=\{a\}\in\tau$

$\{a\}\cap\{a,b\}\cap\{a,b,c\}=\{a\}\in\tau$

$\{a,b\}\cap\{a,b,c\}=\{a,b\}\in\tau$

olduğundan her $U,\ V\in\tau$ ise $U\cap\ V\in\tau$ dir.

(T3) $\varnothing\cup\{a\}=\{a\}\in\tau$

$\varnothing\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\tau$

$\varnothing\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

$\varnothing\cup\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\tau$

$\varnothing\cup\{a\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

$\varnothing\cup\{a,b\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

$\varnothing\cup\{a\}\cup\{a,b\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

$\{a\}\cup\{a,b\}=\{a,b\}\in\tau$

$\{a\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

$\{a\}\cup\{a,b\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

$\{a,b\}\cup\{a,b,c\}=\{a,b,c\}\in\tau$

olduğundan her $i\in I$ için $U_i\in\tau$ ise $\bigcup_{i\in I}U_i\in\tau$ dir.

Örnek: X boştan farklı olmak üzere;

$$\tau=\{\varnothing,X\}$$

şeklindedir. (X,τ) topolojidir ve bu topolojiye aşikâr veya kaba topoloji denir.

Çözüm: (T1) $\varnothing,\ X\in\tau$

(T2) $\varnothing\cap X=\varnothing\in\tau$

(T3) $\varnothing \cup X = X \in \tau$

dir.

Örnek: Bir $\sigma -$ cebiri kümesi olan

$X = \mathbb{N}, \tau = \{\varnothing, \{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}, \{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\}, \mathbb{N}\}$

aynı zamanda topolojidir.

Çözüm: (T1) $\varnothing,\ \mathbb{N} \in \tau$ dir.

(T2) Tek sayılar T ile, Çift sayılar Ç ile gösterelim.

$\varnothing \cap T = \varnothing$, $\quad \varnothing \cap Ç = \varnothing$, $\quad \varnothing \cap \mathbb{N} = \varnothing$

$\varnothing \cap T \cap \mathbb{N} = \varnothing$, $\quad \varnothing \cap Ç \cap \mathbb{N} = \varnothing$, $\quad \varnothing \cap T \cap Ç = \varnothing$,

$\varnothing \cap T \cap Ç \cap \mathbb{N} = \varnothing$ $\quad T \cap Ç = \varnothing$, $\quad T \cap \mathbb{N} = T$

$Ç \cap \mathbb{N} = Ç$, $\quad T \cap Ç \cap \mathbb{N} = \varnothing$

(T3) $\varnothing \cup T = T$, $\quad \varnothing \cup Ç = Ç$, $\quad \varnothing \cup \mathbb{N} = \varnothing$,

$\varnothing \cup T \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\quad \varnothing \cup Ç \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\quad \varnothing \cup T \cup Ç = \mathbb{N}$,

$\varnothing \cup T \cup Ç \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\quad T \cup Ç = \varnothing$, $\quad T \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$,

$Ç \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\quad T \cup Ç \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

Örnek: X herhangi bir küme olsun. P(X) kuvvet kümesinin oluşturduğu topolojiye ayrık topoloji adı verilir. Ayrık topolojinin varlığını göstermek okuyucuya bırakılmıştır.

1.2. Not: n elemanlı kümenin üzerindeki topoloji sayısı T(n) olsun. T(n) sayısının n cinsinden hesaplanması tespit edilememektedir. Bu da topolojinin küme büyüdükçe ne kadar karmaşıklaştığını göstermektedir. Mesela bir üç elemanlı küme düşünelim: $X = \{1,2,3\}$ olsun. Bu küme üzerindeki yazabileceğimiz ilk iki topolojiler $\tau_1 = \{\varnothing, X\}$ ve $\tau_2 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$ dır. Fakat bunların dışında X üzerinde daha 27 tane topoloji daha yazılabilir. Yani $\tau(3) = 29$ dır. Mesela X üzerinde üç elemanlı topolojilerden biri $\tau_3 = \{\varnothing, \{1\}, X\}$, dört elemanlı topolojilerden biri $\tau_4 = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, X\}$ beş elemanlı topolojilerden biri $\tau_5 = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, X\}$ ve altı elemanlı topolojilerden biri $\tau_6 = \{\varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, X\}$ olarak yazılabilir. Geriye kalan 23 tane daha yazılabilir.

Örnek (Sonlu Tümleyen Topolojisi): X sonlu ve ya sonsuz herhangi bir küme olsun.

$\tau_F = \{U \subset X :\ X - U \text{ sonlu küme}\} \cup \{\varnothing\}$

kümesi X'in bir topolojisidir.

Çözüm: Topoloji aksiyomlarını doğrulayalım.

(T1) $\varnothing \in \tau_F$, $X - X = \varnothing$ sonlu olduğundan $X \in \tau_F$ dir.

(T2) $\{A_i\} \in \tau_F$, ($i \in I$ sonlu) olsun.

$$X - \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (X - A_i)$$

Sonlu kümelerin sonlu sayıda birleşimi sonlu olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_F$ dir.

(T3) Her $i \in I$ için $\{A_i\} \in \tau_F$ olsun. O zaman, her $i \in I$ için $X - A_i$ sonludur.

$$X - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X - A_i)$$

Sonlu kümelerin herhangi bir kesişimi sonlu olduğundan $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_F$ olur.

O halde τ_F, X üzerinde topolojidir.

Örnek (Sayılabilir Tümleyen): X sonlu ve ya sonsuz herhangi bir küme olsun.

$\tau_S = \{U \subset X : X - U \text{ sayılabilir küme}\} \cup \{\varnothing\}$

kümesi X'in bir topolojisidir.

Çözüm: (T1) $\varnothing \in \tau_S$, $X - X = \varnothing$ sayılabilir olduğundan $X \in \tau_S$ dir.

(T2) $\{A_i\} \in \tau_F$, ($i \in I$ sayılabilir) olsun.

$$X - \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (X - A_i)$$

Sayılabilir kümelerin sonlu sayıda birleşimi sayılabilir olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_F$ dir.

(T3) Her $i \in I$ için $\{A_i\} \in \tau_F$ olsun. O zaman, her $i \in I$ için $X - A_i$ sayılabilirdir.

$$X - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (X - A_i)$$

Sayılabilir kümelerin herhangi bir kesişimi sayılabilir olduğundan $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_F$ olur.

O halde τ_F, X üzerinde topolojidir.

Örnek (Standart Topoloji): $\mathbb{R}$ reel sayı doğrusu kümesi ve herhangi iki reel sayı; $a, b \in \mathbb{R}$ için $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ kümesine sınırlı açık aralık olsun.

$\tau = \{U \subset \mathbb{R} :$ U herhangi sayıda sınırlı açık aralığın bileşimi$\}$
şeklinde tanımlanan küme reel sayı doğrusu üzerinde topolojidir.

Çözüm: (T1) 1.1. nottan $\varnothing$ ve $X = (a, b) \in \mathbb{R}$ dir.

(T2) Her $J = (1,2, \ldots, p\} \subset I$ sonlu olmak üzere her $i \in J$ sayısı için, $A_i \in U$ olsun. $B = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_p$ diyelim. Bu takdirde kesişim özelliğinden, her $x \in B$ noktası için,

$$x \in B = \bigcap_{i=1}^{p} A_i \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \in A_1 \text{ için } \exists\, x \in (a_1, b_1) \subset \mathbb{R} \text{ öyle ki } x \in (a_1, b_1) \subset A_1 \\ x \in A_2 \text{ için } \exists\, x \in (a_2, b_2) \subset \mathbb{R} \text{ öyle ki } x \in (a_2, b_2) \subset A_2 \\ \quad\vdots \\ x \in A_p \text{ için } \exists\, x \in (a_p, b_p) \subset \mathbb{R} \text{ öyle ki } x \in (a_p, b_p) \subset A_p \end{array}$$

olur. $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$ açık aralıklarının üst sınırlarının minimumunu b ve alt sınırların maksimumunu a ile gösterirsek,

$$b = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_p\},\ a = \max\{a_1, a_2, , \ldots, a_p\}$$

olur. Buna göre

$$\begin{array}{l} x \in (a,b) \subset (a_1, b_1) \subset A_1 \\ x \in (a,b) \subset (a_2, b_2) \subset A_2 \\ \quad\vdots \\ x \in (a,b) \subset (a_p, b_p) \subset A_p \end{array}$$

bulunur. Kesişim özelliğinden,

$$x \in (a,b) \subset \bigcap_{i=1}^{p} A_i = B \in U$$

elde edilir.

(T3) Her $i \in I$ için $A_i \in U$ olsun. Her $x \in A_i$ noktası için $x \in (a_i, b_i) \subset A_i$ olur. Birleşim işleminden,

$$x \in (a_i, b_i) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

dır. Buradan $\bigcup_{i\in I} A_i \in U$ olur.

Sonuç olarak, U ailesi, kümesi ℝ üzerinde bir topolojik yapıdır.

Örnek: $X=[0,1)$ aralığı üzerinde boş küme ile $[0,\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$, biçimindeki yarı-açık aralıklar ailesi;

$$\tau = \{\emptyset, [0,1): 0 < \alpha \leq 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

olsun. (X,τ) topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (T1) $\emptyset \in \tau$ olduğu veriliyor. $\alpha = 1$ olunca $X = [0,1) \in \tau$ dir.

(T2) $A_1 = [0,\alpha_1) \in \tau$, $A_2 = [0,\alpha_2) \in \tau$ ise $\alpha_{1,2} = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ olmak üzere;

$$A_1 \cap A_2 = [0,\alpha_{1,2}) \text{ olacağından } A_1 \cap A_2 \in \tau$$

dir.

(T3) $A_i = [0,\alpha_i) \in \tau$, $(i \in I)$ ise $\delta = \sup \alpha_i$ olmak üzere;

$$\bigcup_{i\in I} U_i = [0,\delta) \text{ olacağından } \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$$

dir. Şu halde (X,τ) topolojidir.

Örnek: ℝ reel sayılar kümesi üzerinde, $(\beta,\infty), \beta \in \mathbb{R}$, biçimindeki açık aralıklardan oluşan ailesi;

$$\tau = \{A: (A \in \mathbb{R}) \vee (A = \emptyset) \vee (A = (\beta,\infty)), \beta \in \mathbb{R}\}$$

olsun. (X,τ) topoloji olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (T1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$ dir.

(T2) $A_1 = (\beta_1,\infty) \in \tau$, $A_2 = (\beta_2,\infty) \in \tau$ ise $\beta_0 = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere;

$$A_1 \cap A_2 = (\beta_0,\infty) \text{ olacağından } A_1 \cap A_2 \in \tau$$

dir. Ayrıca;

$$\mathbb{R} \cap (\beta,\infty) = (\beta,\infty) \in \tau$$
$$\mathbb{R} \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$$
$$(\beta,\infty) \cap \emptyset = \emptyset \in \tau$$

olur.

(T3) $A_i = (\beta_i,\infty) \in \tau$, $(i \in I)$ ise $\delta = \sup(\beta_i)$ olmak üzere;

$$\bigcup_{i\in I} U_i = [\delta,\infty) \text{ olacağından } \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$$

dir. Şu halde (X, τ) topolojidir.

Örnek: Her $q \in \mathbb{Q}$ için

$$A = \{(q, \infty) \subset \mathbb{R} : q \in \mathbb{Q}\}$$

olsun.

$$\tau = \{\emptyset, A, \mathbb{R}\}$$

olsun. (X, τ) topoloji olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$ dizisini alalım.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \notin \mathbb{Q}$$

olduğu dizilerin limiti konusundan bilinmektedir.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = (e, \infty) \notin \tau$$

olur. Böylece τ, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir topoloji değildir.

Örnek (K-topolojisi): $X = \mathbb{R}$ reel sayı doğrusu kümesi, $K = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ ve $(a, b) - K$ şeklindeki kümelere K'sı silinmiş açık aralıklar diyelim.

$$T_K = \{U \subset \mathbb{R} : \text{ U keyfi sayıda açık aralığın ve ya K'sı çıkarılmış bileşimi}\}$$

Bu küme reel sayı doğrusu kümesinin topolojisidir ve reel sayı doğrusunun K-topolojisi olarak adlandırılır.

1.1. Teorem: τ_A ve τ_B bir X kümesi üzerinde birer topolojik yapı olmak zere;

i) $\tau_A \cap \tau_B$ de X üzerinde bir topolojik yapıdır.
ii) $\tau_A \cup \tau_B$ de X üzerinde bir topolojik yapı değildir.

İspat: i)
(T1) $\emptyset, X \in \tau_A$ ve $\emptyset, X \in \tau_B$ olduğundan $\emptyset, X \in \tau_A \cap \tau_B$ dir.

(T2) Her $A, B \in \tau_A \cap \tau_B$ için $A \cap B \in \tau_A$ ve $A \cap B \in \tau_B$ olduğundan

$$A \cap B \in \tau_A \cap \tau_B$$

olur.

(T3) Her $i \in I$ için $A_i \in \tau_A \cap \tau_B$ dir.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_A \text{ ve } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_B$$

olacağından

$$\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_A \cap \tau_B$$

elde edilir.

ii) Bir $X = \{a, b, c\}$ kümesi verilsin.

$$\tau_A = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$$
$$\tau_B = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

birer topolojidir. Bunların topoloji olduklarını göstermek okuyucuya bırakılmıştır.

$$\tau_A \cup \tau_B = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$$

Burada,

$$\{a, b\} \cap \{a, c\} = \{a\} \notin \tau_A \cup \tau_B$$

olup $\tau_A \cup \tau_B$ bir topoloji değildir.

1.1. Sonuç: Boştan farklı X kümesi üzerinde topolojiler ailesi $\{\tau_i : i \in I\}$ olsun. Bu takdirde, topolojilerin herhangi $\bigcap_{i\in I} \tau_i$ kesişimi de X üzerinde topolojidir.

1.2. Tanım: A kümesi, reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesinin alt kümesi olsun. Her $a \in A$ için $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa A kümesine $\mathbb{R}$ de açıktır denir.

Örnek: Her $x \in \mathbb{R}$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R}$'nin kendisi açıktır, $\mathbb{R} \in \tau_s$ dir.

Örnek: Reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi üzerindeki standart topolojiye göre aşağıdaki kümelerin açık olup olmadığını inceleyiniz.

a) Reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi
b) rasyonel sayılar $\mathbb{Q}$ kümesi
c) tamsayılar $\mathbb{Z}$ kümesi
d) $(0, 1)$ aralığı
e) $[0, 1]$ aralığı
f) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi
g) $(0, 2) \cup (4, 6)$ kümesidir.

Çözüm: a) Her $r \in \mathbb{R}$ için $(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \in \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R}$'nin kendisi açıktır, yani $\mathbb{R} \in \tau_s$ dir.

b) Her $q \in \mathbb{Q}$ için $(q-\varepsilon, q+\varepsilon) \in \mathbb{Q}$ olacak şekilde bir ε var olmadığından $\mathbb{Q}$ açık değildir.

c) Her $x \in \mathbb{Z}$ için $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde bir ε var olmadığından $\mathbb{Z}$ açık değildir.

d) Her $x \in (0,1)$ için $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (0,1)$ olacak şekilde bir ε var olduğundan $(0,1)$ aralığı açık kümedir.

e) Bir $0 \in [0,1]$ elemanı için $(-\varepsilon, +\varepsilon) \subset [0,1]$ olacak şekilde bir ε yoktur. Dolasıyla $[0,1]$ aralığı açık değildir.

f) Bir $x \in \{0,1,3,4,5\}$ elemanı için $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \{0,1,3,4,5\}$ olacak şekilde bir ε yoktur. Dolasıyla $\{0,1,3,4,5\}$ kümesi açık değildir.

g) Açık aralıkların birleşimi açık olduğundan $(0,2) \cup (4,6)$ kümesi açıktır.

Örnek: Her $i \in \{1,2,\dots,n\}$ için A_i açık olmak üzere $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ olsun. O zaman Her $i \in \{1,2,\dots,n\}$ için $x \in A_i$ dir, A_i ler açık olduğundan için $(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon) \subset A_i$ olacak şekilde bir $\varepsilon_i > 0$ vardır. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ alırsak $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ açıktır, yani $\cap A_i \in \tau_s$ dir.

Örnek: Her $i \in I$ için A_i açık olmak üzere $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olsun. O zaman, $x \in A_{i_0}$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ vardır. A_{i_0} açık olduğundan $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A_{i_0}$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Böylece $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ ve dolasıyla $\bigcup_{i \in I} A_i$ açıktır, yani $\cup A_i \in \tau_s$ dir.

1.3. Tanım: X bir küme ve üzerinde bir < üzerindeki sıralama bağıntısı olsun. Ayrıca, X'in bu sıralama bağıntısına göre en küçük ve en büyük elemanı olmasın. $a < b$ şartını sağlayan her $a, b \in X$ için $(a,b) = \{x \in X : a < x < b\}$ aralığını tanımlyalım. Bu tip aralıkların keyfi (herhagi) bileşimlerinin koleksiyonu X üzerinde bir topoloji tanımlar. Bu topolojiye X'in sıralama topolojisi denir. X'in en küçük ve en büyük elemanları varsa bu tanımın amacına ulaşılması gerektiğini belirtelim. Açıkça görüldüğü gibi bu topoloji reel sayısı doğrusunun doğal topolojisinin seçimidir.

$\mathbb{R}^2$ üzerinde bir sıralama var mıdır? Doğru üzerinde bir noktada durduğumuzda sadece iki yön vardır sağ-sol (doğu-batı) ve bu nedenle sıralama bağıntısını bulmak kolaydır. Fakat düzlem üzerinde bir noktada durduğumuzda gidebileceğimiz sonsuz tane yön vardır. Doğu-batı ve kuzey-güney bunlardan sadece dördüdür. Bununla birlikte düzlemde sıralama bağıntısı bulmak mümkündür. Bu sıralamalardan biri kütüphanelerde kullanılan "sözlük sıralaması" denilen sıralamadır.

Eğer (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) düzlemde iki nokta ise önce ilk koordinatlarına bakarız. Eğer $x_1 < y_1$ ise $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ olduğunu kabul ederiz. Fakat $x_1 = x_2$ ise ikinci koordinatlarına bakarız. Eğer $x_1 = x_2$ ve $y_1 < y_2$ ise $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ olduğunu kabul ederiz. Bu düzlemde sıralama bağıntısı tanımlar ve bu sıralama bağıntısı düzlem üzerindeki sözlük topolojsini var eder. Sözlük topolojisinin tanımı benzer şekilde diğer $\mathbb{R}^n$ lere $(n \geq 3)$ genelleştirilebilir. Reel sayı doğrusu üzerindeki sözlük topolojsinin standart topoloji ile aynı olduğunu söylemiştik. Fakat $n \geq 2$ için bu doğru değildir.

1.4. Tanım: Reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesindeki $[a, b)$ şeklindeki aralıkların birleşimi olarak yazılan kümelerin kolleksiyonu τ, reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu şekilde elde edilen $\mathbb{R}$ üzerindeki topolojiye alt limit topolojisi denir.

Yine reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesindeki $(a, b]$ şeklindeki aralıkların birleşimi olarak yazılan kümelerin kolleksiyonu τ, reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu şekilde elde edilen $\mathbb{R}$ üzerindeki topolojiye üst limit topolojisi denir.

ALTARNATİF TOPOLOJİ TANIMI

Topolojinin tanımı 1.1. tanımda verilmiştir. Burada altarnatif bir tanım daha yapacağız.

1.5. Tanım: τ, boştan farklı herhangi bir küme ve $X \subseteq \tau$ kümeler olsun.

(T1) τ'nun her elemanı X'in alt kümesidir.

(T2) τ'nun sonlu sayıda elemanlarının arakesiti τ'ya aittir veya boş kümedir.

(T3) τ'nun herhangi sayıda (keyfi, sonlu-sonsuz) elemanlarının birleşkesi τ'ya aittir. Yani,

$$\text{Her } i \in I \text{ için } U_i \in \tau \text{ ise } \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$$

aksiyomları var ise τ kümesine X kümesi üzerinde topoloji denir, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir. (X, τ) ikilisini kısaca X şeklinde göstereceğiz. //

Bu alternatif tanım ile verilen ilk tanım arasındaki fark $\varnothing \in \tau$ olmasının zorunluluğunun olmamasıdır. İhtiyaca binaen $\varnothing$ olmasıdır.

TOPOLOJİDE AÇIK ve KAPALI KÜMELER

1.6. Tanım: (X,τ) topolojik uzayında, $A \in \tau$ kümelerine açık kümeler denir. Eğer $A \subset X$ kümesinin tümleyeni açık ise yani $A^t = X - A$ ise A'ye kapalı küme denir.

Örnek: $\mathbb{R}$ uzayında $[a,b], (-\infty,a], [a,+\infty)$ alt kümelerinin kapalı olup olmadıklarını belirleyiniz.

Çözüm: $\mathbb{R} - [a,b] = (-\infty,a) \cup (b,+\infty)$ kümesi açıktır. Çünkü $(-\infty,a)$ ve $(b,+\infty)$ kümeleri açıktır. Tanımdan, $[a,b]$ kümesi kapalıdır.

$\mathbb{R} - (-\infty,a] = (a,+\infty)$ kümesi açık olduğundan, $(-\infty,a]$ aralığı bir kapalı kümedir.

$\mathbb{R} - [a,+\infty) = (-\infty,a]$ kümesi açık olduğundan, $[a,+\infty)$ aralığı bir kapalı kümedir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ düzleminde $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ alt kümesinin kapalı olup olmadığını araştırınız.

Çözüm:

$\mathbb{R}^2 - A = ((-\infty,0) \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times (-\infty,0))$

Açıktır, çünkü $(-\infty,0) \times \mathbb{R})$ ve $\mathbb{R} \times (-\infty,0)$ alt kümeleri $\mathbb{R}^2$ de açıktır. Böylece A kapalıdır.

Örnek: Bir ayrık topolojik uzayda her küme hem açık hemde kapalıdır.

1.3. Not: Açık küme X'in belli bir topolojisine göre tanımlanmaktadır. Bir küme üzerinde birden fazla topoloji olabileceğinden, X'in bir topolojisine göre açık olan bir küme başka bir topolojisine göre açık olmayabilir.

Örneğin $X = \{1, 2\}$ için $U = \{1\}$ kümesi ayrık topoloji için açık kümedir fakat aşikar topoloji için açık küme değildir. Bu örnek ayrıca bir kümenin ne açık nede kapalı olabileceğini de göstermektedir. Ne açık nede kapalı kümeler olabileceği gibi, hem açık hem kapalı kümelerde vardır. En basiti $\varnothing$ ve X kümeleri, $\varnothing^t = X$ ve $X^t = \varnothing$ olduğu için X'in her topolojisi için hem açık hem de kapalı kümelerdir. Bu bariz iki örneğin dışında hem açık hem kapalı küme örneği olan başka örneklerde vermek mümkündür.

Örneğin, $X = \{1, 2, 3, 4,5\}$ kümesi üzerindeki
$\tau = \{\varnothing,\{1\},\{2, 3\},\{4,5\},\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,3,4,5\},X\}$
topolojisini düşünelim. Bu topolojiye göre $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi hem açık hemde kapalıdır.

1.4. Not: $[a,a] = \{a\}$ tek nokta kümeleri kapalıdır.

Örnek: $\{0\}$ kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(-\infty,0)$ ve $(0,+\infty)$ kümeleri açıktır.
$$[(-\infty,0) \cup (0,+\infty)]^t = \{0\}$$
olduğundan $\{0\}$ kapalıdır.

Örnek: Standart topolojiye göre sonsuz tane kapalı kümenin bileşiminin açık küme olabileceğini gösteriniz.

Çözüm: $\mathbb{R}$ den basit bir örnek verelim.
$$(0,1)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right] \text{ veya } (0,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},n\right] \text{ veya } (-\infty,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]$$

Örnek: Standart topolojiye göre sonsuz tane açık kümenin kesişimin kapalı küme olabileceğini gösteriniz.

Çözüm: $\mathbb{R}$ den basit bir örnek verelim.

$$\{1\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$$

tek nokta kümesi kapalıdır.

Örnek: $\mathbb{R}$ üzerinde standart topoloji var olsun. Aşağıdakileri gösteriniz.
1. Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ kapalıdır.
2. $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ sonlu bir küme kapalıdır.
3. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ kapalı değildir.
4. $B=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi kapalı değildir.

Çözüm:
1. Her bir $(n,n+1)$ açık aralığı standart topolojiye göre açık olduğundan $\mathbb{R}-\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n,n+1)$ açıktır. Böylece $\mathbb{Z}$ kapalıdır.

2. $\mathbb{R}-A=\{(-\infty,1)\cup(1,2)\cup\dots\cup(n-1,n)\cup(n,\infty)\}$ kümesi açık olduğundan, A kümesi kapalıdır.

3. $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ açık bir küme olup olmadığı tespit edilemeyeceğinden $\mathbb{Q}$ ne açık ne de kapalıdır. Çünkü $\mathbb{Q}$ açık aralıkların bileşimi biçiminde yazılamazlar.

4. $\mathbb{R}-B=(-\infty,0]\cup(1,2)\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$ kümesi açık olmadığından, kapalı değildir.

Örnek: Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde standart topoloji var olsun. Reel sayılar kümesinin alt kümesi $Y=[0,1]\cup(2,3)$ verilsin. $[0,1]$ ve $(2,3)$ alt kümelerinin Y de kapalı veya açık olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: $\mathbb{R}$ uzayında $\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$ açık kümesini alalım. $[0,1]=Y\cap\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$ olduğundan, alt uzay topolojisine göre $[0,1]$ kümesi Y'de açıktır. Benzer şekilde, $(2,3)$, Y'de açıktır. Diğer taraftan

$$Y-[0,1]=(2,3) \text{ ve } Y-(2,3)=[0,1]$$

olduğundan bu iki küme Y de kapalıdır. O halde bu iki küme Y'de hem açık hemde kapalıdır.

1.2. Teorem: (X,τ) topolojik uzay ve K bu topolojisinin kapalı küme ailesi olsun. K aşağıdaki şartları sağlar:
(K1) $\varnothing,\ X\in K$

(K2) K'nın herhangi (sonlu-sonsuz) sayıda elemanının kesişimi K'dadır.
(K3) K'nın sonlu sayıda elemanın bileşimi K'dadır.

İspat: (K1) $\varnothing$ ve X açık kümeler ise,

$$X-\varnothing,=X\in K \text{ ve } X-X=\varnothing\in K$$

dır.

(K2) Her $i\in I$ için $F_i\in K$ olsun. Her F_i kümesi kapalı olduğundan $A_i=X-F_i$ kümesi açık olur. Böylece $(A_i)_{i\in I}$ açıklar ailesini elde ederiz. Burada $A=\bigcup_{i\in I}A_i$ alınırsa

$$F=X-A=X-\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(X-A_i)=\bigcap_{i\in I}F_i\in K$$

elde edilir.

(K3) K ailesine ait sonlu sıyda $F_1,F_2,\dots,F_p$ elemanlarını alalım.

$$A_1=X-F_1, A_2=X-F_2,\dots,A_p=X-F_p$$

kümeleri sonlu sayıda açık kümelerdir. Bu kümeler τ ailesine aittir. Buna göre

$$B=\bigcap_{i=1}^{p}A_i=\bigcap_{i=1}^{P}(x-F_i)$$

kümesi açıktır. Şu halde $X-B=\bigcup_{i=1}^{p}F_i$ kümesi kapalıdır ve $\bigcup_{i=1}^{p}F_i\in K$ dır.

Örnek (Sonlu Tümleyen Topolojisi): Herhangi bir X kümesini alalım. Elemanları X kümesi ve X kümesinin sonlu alt kümelerinden oluşan aileyi K ile gösterelim. Bu K ailesi (K1), (K2) ve (K3) aksiyomlarını sağlar.

Çözüm: (K1) $X\in K$ soruda verilmiştir. $\varnothing$ küme sonlu olup $\varnothing\in K$ olur.

(K2) Her $i\in I$ sayısı için $F_i\in K$ olsun. Hipotez gereği her sayısı için, F_i kümeleri sonlu olup, sonlu kümelerin kesişimi olduğundan $\bigcap_{i\in I}F_i$ kümesi sonludur, öyle ki $\bigcap_{i\in I}F_i\in K$ dir.

(K3) $J\subset I$ sonlu bir alt küme olmak üzere her $i\in I$ sayısı için $F_i\in K$ olsun. Bu takdirde her $i\in J$ sayısı için $F_i\in K$ kümeleri sonludur. Böylece

$$\bigcup_{i\in J}F_i\in K$$

elde edilir.

Örnek: Herhangi bir kümenin sonlu tümleyen topolojisine göre kapalı küme midir?

Çözüm: K sonlu tümleyen topolojisinin kapalı kümesidir ancak ve ancak K^t sonlu tümleyen topolojisinin açık kümesidir. $(K^t)^t$ sonlu kümedir ya da X'dir ancak ve ancak K sonlu kümedir veya X'dir. Buna göre sonlu tümleyen topolojide bir kümenin kapalı küme olması demek ya sonlu küme olması demektir ya da X'in kendisi olması demektir.

1.3. Teorem: X bir topolojik uzay A ve B açık alt kümeleri olsun. A ve B'nin alt uzay topolojileri sırası ile T_A ve T_B olsun. Ve de $A \cap B$ kümesinin alt uzay topolojisi ise $T_{A\cap B}$ olsun. Bu durumda, $T_{A\cap B} = T_A \cap T_B$ dir.

İspat: i) Önce $T_A \cap T_B \subset T_{A\cap B}$ yönünü gösterelim: $V \in T_A \cap T_B$ ise $V = A \cap U = B \cap U^t$ şeklinde yazılabilir. Burada $U, U^t \in T$ dir. O halde $V \subset A$ ve $V \subset B$ ve dolayısıyla $V \subset A \cap B$ olur.

$$V = V \cap A \cap B = A \cap U \cap A \cap B = (A \cap B) \cap U$$

olacağı için $V \in T_{A\cap B}$ sonucu çıkar.

ii) Şimdi $T_{A\cap B} \subset T_A \cap T_B$ yönünü gösterelim: $V \in T_{A\cap B}$ ise öyle bir $U \in T$ vardır ki $V = A \cap B \cap U$ şeklindedir. Fakat bu durumda bu kümeyi iki farklı durumda yazabiliriz. $V = A \cap (B \cap U) = A \cap U^t$ şeklinde yazarsak, ki burada B açık küme olduğu için $U^t = B \cap U \in T$ dir, $V \in T_A$ olduğunu görürüz.

$$V = B \cap (A \cap U) = B \cap (U^t)^t$$

şeklinde yazarsak, ki burada A açık küme olduğu için $(U^t)^t = A \cap U \in T$ dir, $V \in T_B$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla $V \in T_A \cap T_B$ olur. (i) ve (ii) den

$$T_{A\cap B} = T_A \cap T_B$$

dir.

1.4. Teorem: X bir topolojik uzay A kümesi ile kapalı bir K kümesi veriliyor.

i) $A - K$ kümesi açıktır

ii) $K - A$ kümesi kapalıdır.

İspat:

i) $A - K = A \cap K^t$ kümesi, açık iki kümenin ara kesti olduğu için açıktır.

ii) $K - A = K \cap A^t$ kümesi kapalı iki kümenin ara kesti olduğu için kapalıdır.

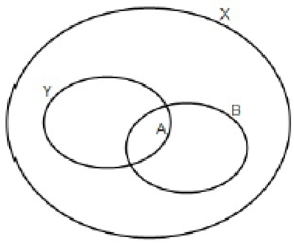
1.5. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset Y \subset X$ olsun. A kümesinin Y de kapalı olması için gerek ve yeter şart $A = Y \cap B$ olacak şekilde X'de B kapalı alt kümesinin var olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: A kümesi, Y'de kapalı olsun. Bu durumda $Y - A$ kümesi Y'de açıktır. Tanımdan, $Y - A = Y \cap U$ olacak şekilde $U \in \tau$ açığı vardır. $U \in \tau$ olduğundan $B = X - U$ kümesi X'de kapalıdır. Böylece $A = Y \cap B$ dir.

$\Leftarrow$: B kümesi X'de kapalı küme olmak üzere $A = Y \cap B$ olsun. $X - B$ kümesi X'de açık olduğundan $Y \cap (X - B)$ kümesi Y'de açıktır. Diğer taraftan,

$$Y \cap (X - B) = Y - A$$

dir. Böylece $Y - A$ kümesi Y de açıktır. Sonuç olarak A kümesi Y'de kapalıdır.



1.7. Tanım: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine $\{-\infty\}$ ve $\{+\infty\}$ noktaları eklenerek oluşturulan kümeye genişletilmiş reel sayılar kümesi denir ve $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ simgesi ile gösterilir.

1.5. Not: Her $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart

(i) $A \in U$

(ii) $+\infty \in A$ ise $\exists\ b \in \mathbb{R}$ dir, öyle ki $(b, +\infty] \subset A$

(iii) $-\infty \in A$ ise $\exists\ a \in \mathbb{R}$ dir, öyle ki $[-\infty, a) \subset A$

olmasıdır.

1.2. Sonuç: $\overline{\mathbb{R}}$ kümesinin tüm açık alt kümelerinden $\overline{U} = (A_i)_{i \in I}$ oluşan ailesi, $\overline{\mathbb{R}}$ kümesi üzerinde bir topolojik yapıdır.

TOPOLOJİDE KOMŞULUK

1.8. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $x \in A \subset \tau$ olacak şekilde açık A kümesine x noktasının bir açık komşuluğu denir. Birkaç noktanın komşuluğunun oluşturduğu kümeye, komşuluklar ailesi adı verilir.

A, x ın bir açık komşuluğudur $\Leftrightarrow x \in X$ ve $A \in \tau \ \ni x \in A$

Örnek: $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$$

topolojisi verilsin. a ve c noktalarının açık komşuluklarını bulunuz.

Çözüm:
a noktasının açık komşulukları $\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}$ ve X
c noktasının açık komşulukları $\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X$ dir.

Örnek: $X = \{a, b, c, d, e\}$ bir küme ve

$$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, X\}$$

ailesi X üzerinde bir topoloji olsun. $b \in X$ noktasının komşuluklar ailesini bulunuz.

Çözüm: b noktasını içeren açıklar

$\{a, b\}$, $\{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, X$

şeklindedir. Şimdi bu noktaların komşuluklarını bulalım. X'i içeren açık yine X'dir. $\{a, b\}$ yi içeren X'in alt kümeleri

$\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, e\}, X$

dir. $\{a, b, c, d\}$ yi içeren X'in alt kümeleri $\{a, b, c, d\}$ ve X'dir. $\{a, b, e\}$ yi içeren X'in altkümeleri

$\{a, b, e\}$, $\{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, X$

dir. O halde komşuluklar ailesi

$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, X\}$

şeklindedir.

1.3. Sonuç: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesi açık küme ise, A kümesi kendi içindeki bir noktanın bir açık komşuluğudur.

Örnek: $A = (0, 1)$ aralığı, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde standart topolojiye göre, $\dfrac{2}{3}$ noktasının bir açık komşuluğudur.

Örnek: $B = (0, 1) \cup \{2\}$ kümesi, $\mathbb{R}$ kümesi üzerindeki standart topolojiye göre açık küme olmadığından hiçbir noktanın açık komşuluğu olamaz.

1.9. Tanım: Açık bir komşuluğu kapsayan her kümeye komşuluk adı verilir. Bu komşuluk açık veya kapalı olabilir.

Örnek: $(\mathbb{R}, U)$ standart topolojisi verilsin. Her $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ açık aralığı, her $x \in \mathbb{R}$ noktasının bir komşuluğudur. Çünkü

$$x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$$

dir.

1.6. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A alt kümesinin X'de açık küme olması için gerek ve yeter şart A kümesinin, kendi içindeki her noktasının bir komşuluğu olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: A kümesi X'de açık ve $x \in A$ olsun. $U = A$ alırsak $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde x elemanın bir komşuluğu vardır.

$\Leftarrow$: Her $x \in A$ için bu x elemanın U_x komşuluğu vardır, öyle ki $x \in U_x \subseteq A$ dir.

$$A = \bigcup_{x \in A} U_x$$

dir. Böylece A kümesi açık kümelerinin birleşimidir ve dolasıyla A kümesi açıktır.

1.6. Not: 1. U, X'de açık olsun. O halde U, $\forall\, x \in U$ noktasının bir komşuluğudur.

2. Bir topolojik uzayda açık kümelerin herhangi bir ailesinin arakesiti, genelde açık değildir.

1.7. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ noktası verilsin. x noktasının $\vartheta(x)$ komşuluklar ailesi aşağıdaki özellikleri sağlar;

(V1) Her $V \in \vartheta(x)$ komşuluğu için $x \in V$ dir.

(V2) x noktasının her sonlu sayıda komşuluklarının kesişimi de x noktasının bir komşuluğudur.

(V3) $\vartheta(x)$ ailesine ait herhangi bir kümenin üst kümesi de $\vartheta(x)$ ailesine aittir.

(V4) $\forall\, V \in \vartheta(x)$ için $\exists\, W \in \vartheta(x) \ni \forall\, y \in W$ için $V \in \vartheta(x)$ dir.

İspat:

(V1) Her $V \in \vartheta(x)$ komşuluğu için x açık küme ise $x \in T \subset V$ olacak şekilde T kümesi bulunabileceğinden $x \in V$ dir.

(V2) Sonlu sayıda $V_1, V_2, \dots, V_n \in \vartheta(x)$ komşulukları verilsin.
$V_1 \in \vartheta(x)$ olduğundan

$$\exists A_1 \in \tau \ni x \in A_1 \subset V_1,$$

$V_2 \in \vartheta(x)$ olduğundan

$$\exists A_2 \in \tau \ni x \in A_2 \subset V_2,$$

...
$V_n \in \vartheta(x)$ olduğundan

$$\exists A_n \in \tau \ni x \in A_n \subset V_n$$

olur. Kesişim işleminden,

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$$

elde edilir. $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \tau$ olduğundan

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \vartheta(x)$$

bulunur.

(V3) $V \in \vartheta(x)$ komşuluğu verilsin. Eğer $V \subset U \subset X$ ise $U \in \vartheta(x)$ olur. O halde x noktasının herhangi bir komşuluğunu kapsayan her küme de x noktasının bir komşuluğudur.

(V4) $V \in \vartheta(x)$ komşuluğu verilsin. Buna göre $x \in W \subset V$ olacak şekilde $W \in \vartheta(x)$ açık komşuluğu vardır. W kümesi açık olduğundan, her $y \in W$ için y noktasının açık bir komşuluğudur. $y \in W \subset V$ ve W açık bir küme olduğundan $V \in \vartheta(x)$ dir.

1.10. Tanım: (V1), (V2), (V3) ve (V4) aksiyomlarına komşuluk aksiyomları denir. Buna göre x noktasının her açık komşuluğunun, x noktasının bir komşuluğu olduğu aşikardır, fakat tersi çoğunlukla doğru değildir.

Örnek: (X, τ) ayrık olmayan topoloji olsun. Her $x \in X$ noktası için, x noktasının komşuluklar ailesini bulunuz.

Çözüm: $x \in X$ ve $X \in \tau$ olup her x noktasının tek açık komşuluğu X kümesinin kendisidir. O halde $\vartheta(x) = \{X\}$ olur.

1.8. Teorem: (X,τ_1) ve (X,τ_2) iki topolojik uzay olsun. Bu takdirde $\tau_1 = \tau_2$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ noktası için, bu topolojiye göre komşuluklarının aynı olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $\tau_1 = \tau_2$ olsun. Her $x \in X$ noktası için, $x \in T_A$ olacak biçimde bir $T_A \in \tau_1$ vardır. $\tau_1 = \tau_2$ olduğundan $T_A \in \tau_2$ olur. Her $x \in X$ noktası için, $T_A \subset N$ elde edilir.

$\Leftarrow$: Her $x \in X$ noktası için, $G \in \tau_1$ ve $H \in \tau_2$ olacak şekilde açık kümeler varsa, M ve N kümelerini kapsayan bir L açık kümesi bulunabilir, öyle ki $x \in G \subset M \subset L$ ve $x \in H \subset N \subset L$ olur. Böylece $\tau_1 = \tau_2$ elde edilir.

1.9. Teorem: Bir noktanın sonlu sayıdaki komşuluklarının birleşimi de, o noktanın bir komşuluğudur.

İspat: (X,τ) topolojik uzayı ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Herhangi $V_1, V_2 \in \vartheta(x)$ komşuluklarını alalım. Buna göre,

$$\exists\, W_1 \in \tau \ \ni x \in W_1 \subset V_1 \text{ ve } \exists\, W_2 \in \tau \ \ni x \in W_2 \subset V_2$$

olur. Birleşim işleminden,

$$\exists\, W_1 \cup W_2 \in \tau \ \ni x \in W_1 \cup W_2 \subset V_1 \cup V_2$$

bulunur.(T3) aksiyomundan $W_1 \cup W_2 \in \tau$ olup komşuluk tanımı

$$V_1 \cup V_2 \in \vartheta(x)$$

elde edilir.

1.10. Teorem: Bir X kümesi verilsin. Her $x \in X$ noktası için, komşuluk aksiyomları sağlanacak şekilde bir $\vartheta(x)$ ailesi varsa, X kümesi üzerinde bir tek τ topolojik yapısı vardır, öyle ki $\vartheta(x)$ komşuluklar ailesi, x noktasının τ-komşuluklarından ibarettir.

İspat: Bir X kümesi verilsin. Bu küme üzerinde τ ailesini

$$\tau = \{A \subset X : \ x \in A \Rightarrow A \in \vartheta(x)\} \qquad (1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde τ ailesinin X kümesi üzerinde bir topoloji olduğu açıktır. (T3) aksiyomu (V2) aksiyomundan ve (T2) aksiyomunu da (V3) aksiyomundan elde edilir. (T1) aksiyomu, (V2) ve (V3) komşuluk aksiyomlarının bir sonucudur.

Şimdi her $x \in X$ için $\vartheta(x)$ ailesinin, x noktasının τ-komşuluklar ailesi olduğunu gösterelim. (V3) aksiyomundan ve (1) ifadesinden, x noktasının her τ-komşuluğu $\vartheta(x)$ ailesine aittir.

Tersine, her $V \in \vartheta(x)$ kümesinin x noktasının her bir τ-komşuluğu olduğunu göstermek için,

$$U = \{y \in x: \ V \in \vartheta(x)\} \qquad (2)$$

kümesini tanımlayalım. $V \in \vartheta(x)$ olduğundan (2) ifadesinden $x \in U$ olur. $y \in U$ ise $V \in \vartheta(x)$ olur. (V1) aksiyomundan $y \in V$ olur. Böylece $U \subset V$ olur. Şimdi de $U \in \tau$ olduğunu gösterelim. Bunun için 1.6. teorem gereği, her $y \in U$ noktası için, $U \in \vartheta(x)$ olduğunu göstermek yetecektir; $y \in U$ ise $V \in \vartheta(x)$ olduğundan (V4) aksiyomundan, bir $W \in \vartheta(x)$ komşuluğu vardır, öyle ki her $z \in W$ noktası için, $V \in \vartheta(z)$ olur. (2) ifadesinden $z \in U$ ve $W \subset U$ bulunur. (V3) aksiyomu gereği, $y \in U$ noktası için $U \in \vartheta(x)$ olur.

Örnek: Bir X kümesi verilsin. Her $x \in X$ noktası için,

$$\vartheta(x) = \{A \subset X: \ x \in A\}$$

ailesinin, komşuluk aksiyomlarını sağladığını gösteriniz ve X kümesi üzerindeki topolojiyi bulunuz.

Çözüm: (v1) aksiyomundan $A \in \vartheta(x)$ ise $\vartheta(x) = \{A \subset X: \ x \in A\}$ ifadesinden $x \in A$ ve $x \in B$ olur. Buradan $x \in A \cap B$ ve $A \cap B \in \vartheta(x)$ olur.

(V3) Her $A \in \vartheta(x)$ ve $A \subset B$ ise $B \in \vartheta(x)$ dir.

(V4) Her $A \in \vartheta(x)$ komşuluğu için bir $U \in \vartheta(x)$ kümesi vardır, öyle ki $U \subset A$ dır. Her $y \in U$ noktası için $A \in \vartheta(x)$ dir. Gerçekten her $y \in U$ noktası için, $U \in \vartheta(y)$ olur. Böylece

$$\tau = \{A \subset X : \forall\, x \in A, A \in \vartheta(x)\} = P(X)$$

olup, τ topolojisi X kümesi üzerindeki ayrık topolojidir.

İÇ, DIŞ, KAPANIŞ ve SINIR

1.11. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

i) A tarafından kapsanan bütün açık kümelerin bileşkesine veya diğer bir ifadeyle A tarafından kapsanan en büyük açık kümeye A'nın içi denir ve A^0 ile gösterilir.

ii) A'yı kapsayan bütün kapalı kümelerin kesişimine veya diğer bir ifadeyle A'yı kapsayan en küçük kapalı kümeye A'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

iii) A kümesinin sınırı (kabuğu), ∂A ile gösterilmek üzere $\partial A = \overline{A} - A^0$ şeklinde tanımlanır. Bu tanım alternatif olarak şu şekilde de tanımlanır. $\partial A = \overline{A} - \overline{(A^t)}$ dir.

iv) $(\overline{A})^t = X - \overline{A}$ açık kümesine A'nın dışı denir.

1.4. Sonuç: İç ve kapanış arasında şu ilişki vardır: $A^0 \subset A \subset \overline{A}$ dir.

Örnek: $\mathbb{R}$ in standart topolojisinde,

$$\overline{(0,1)} = \overline{[0,1)} = \overline{(0,1]} = [0,1]$$

olduğu $[0,1)$ ve $(0,1]$ kümeleri kapalı olmadığı için tanımdan söylenebilir. Aynı şekilde $[0, 1)$ ve $(0, 1]$ kümeleri açık olmadığı için

$$[0,1]^0 = [0,1)^0 = (0,1]^0 = (0,1)$$

dir. Ve dolayısıyla bu kümelerin dördününde sınırı aynıdır ve

$$\partial[0,1] = \partial[0,1) = \partial(0,1] = \partial(0,1) = \{0,1\}$$

olur.

Örnek: Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde ayrık topoloji var olsun. $A = [0,1)$ alt kümesini ele alalım. $A^0 = \overline{A} = [0,1)$ dir.

Örnek: Reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde standart topolojiye göre $A = \{0\} \times [-1,1]$ alt kümesini ele alalım. $A^0 = \emptyset$ ve $\overline{A} = A$ olduğundan $\partial A = A$ dir.

Örnek: Reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde ayrık topoloji var olsun. $A = [-1,1]$ alt kümesini ele alalım. $A^0 = A$ ve $\overline{A} = A$ olduğundan $\partial A = \emptyset$ dir.

Örnek: Reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde alt limit topoloji var olsun. $A = [-1,1]$ alt kümesini ele alalım. $A^0 = [-1,0)$ ve $\overline{A} = A$ olduğundan $\partial A = \{-1\}$ dir.

Örnek: $X = \{1,2,3,5\}$ kümesi üzerinde

$$\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4,5\}, \{3,4\}, X\}$$

topolojisi verilsin. $A = \{2,3,4\}$ kümesini inceleyelim.

Çözüm: $A^0 = \{3,4\}$ ve $\overline{A} = \{2,3,4,5\}$ olduğundan $\partial A = \emptyset$ dir.

Örnek: (X,τ) topolojik uzay olsun.

$$X^0 = X = \overline{X},\ \emptyset^0 = \emptyset = \overline{\emptyset},\ \partial X = \emptyset, \partial\emptyset = \emptyset$$

ii) τ_i, X de ayrık topoloji $A \subset X$ olsun. $\overline{A} = A = A^0$ ve $\partial A = \emptyset$ dir. Gerçekten, Ayrık topolojide her küme hem açık hem kapalıdır. Dolayısıyla bir A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme A'nın kendisidir. Yani $\overline{A} = A$ dır. Benzer şekilde $A = A^0$ gösterilir.

iii) Sonsuz bir X kümesi üzerindeki sonlu tümleyenler topolojisine göre, her sonsuz $A \subset X$ alt kümesi için $\overline{A} = X$ dır. Gerçekten sonlu tümleyenler topolojisinde kapalı sonludur. Bunun tek istisnası hem açık hem kapalı olan X kümesidir. Sonsuz A kümesini kapsayan tek bir kapalı küme vardır. O da X'dir. O halde $\overline{A} = X$ olmalıdır.

Örnek: Reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde standart topoloji ve rasyonel sayılar $\mathbb{Q}$ alt kümesini ele alalım. $\mathbb{Q}^0 = \emptyset$ ve $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olduğundan $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ dir.

Örnek: Reel sayılar $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde standart topoloji var olsun. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ olsun. $A^0 = \emptyset$ ve $\overline{A} = A \cup \{0\}$ olduğundan $\partial A = A \cup \{0\}$ dir.

Örnek: Standart topolojiye göre aşağıdaki kümelerin iç, kapanış ve sınırlarını yazınız:

a) $A = (0,1) - \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+\right\} \subset \mathbb{R}$

b) $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$

Çözüm:

a) A açık kümedir yani $A^0 = A$,

Kapanışı: $\overline{A} = [0,1]$,

Sınırı: $\partial A = \left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+\right\} \cup \{0,1\}$

b) B açık küme olduğu için $B^0 = B$,

Kapanışı: $\overline{B} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

Sınırı: Üç kümenin bileşimi olarak

$$\partial B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\} \cup \{(x,y) : -1 \leq y \leq 1, x = 0\} \cup \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

Örnek: $\mathbb{R}^2$ den alınan standart topolojiye göre aşağıdaki alt kümelerin iç, kapanış ve sınırlarını yazınız:

a) $A = \{(x,y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{(x,y) : y \neq 0\}$

c) $C = \{(x,y) : 0 \leq x < 1, y \neq 0\}$

Çözüm: $\mathbb{Q}$ kümesinin $\mathbb{R}$ deki içi boş kümedir yani içi yoktur. O halde $A^0 = \varnothing$ olmalıdır. Gerçekten de biraz daha açıklamak gerekirse, mesela A'da bir nokta alalım. Diyelim $(q,y) \in A$ olsun. (q,y) merkezli her açık disk (x,y) şeklinde ve $x \in I$ olacak şekilde bir eleman yani A'da olmayan bir eleman içerecektir. O halde (q,y) elemanı A'nın içinde olamaz. Yani A'nın hiçbir elemanı A'nın içinde olamaz. O halde A'nın içi yoktur. Boş kümedir. $\mathbb{Q}$ kümesinin $\mathbb{R}$ deki kapanışı tüm reel sayılar olduğu için A'nın kapanışı da tüm düzlem olacaktır. Buna göre $\overline{A} = \mathbb{R}^2$ ve dolayısıyla $\partial A = \overline{A} - A^0 = \mathbb{R}^2$ dir.

b) B açık kümedir. $B^0 = B$ ve $\overline{B} = \mathbb{R}^2$ ve $\partial B = \overline{B} - B^0 =$ x ekseni olur.

c) $C^0 = \{(x,y) : 0 < x < 1, y \neq 0\}$
$\overline{C} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1\}$
$\partial C = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$

1.11. Teorem: Bir kümesinin hem açık hem de kapalı olması için gerek ve yeter şart $\partial A = \varnothing$ olmasıdır.

İspat: $\partial A = \varnothing \Leftrightarrow [(\partial A \subset A) \Rightarrow A \text{ kapalı}]$
$\Leftrightarrow [(A^0 = A) \Rightarrow A \text{ açık}]$

1.12. Teorem: X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.
a) Bir kümenin sınırı kapalıdır.
b) $\partial(\partial A) = \partial A$ dir.

İspat: a) $\partial A = \overline{A} - A^0 = \overline{A} \cap (A^0)^t = \overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}$ iki kapalı kümenin kesişimidir, dolayısıyla kapalıdır.

b) $(x \in \partial A) \wedge (x \notin \partial(\partial A))$ olacak şekilde bir x elemanı varsa, $\exists\, T_1, T_2 \in \tau$ için
$x \notin \partial(\partial A) \Leftrightarrow [(x \in (\partial A)^0] \vee [(x \in ((\partial A)^t)^0]$
$\Leftrightarrow [(x \in T_1 \subset \partial A] \vee [(x \in T_2 \subset (\partial A)^t]$
$\Leftrightarrow [(x \in T_1 \cap T_2 \subset \partial A] \vee [(x \in T_1 \cap T_2 \subset (\partial A)^t]$
olurdu. Bu çelişki olamayacağından seçilen biçimde bir x elemanı yoktur. O halde $\partial(\partial A) = \partial A$ olur.

Örnek: $\partial(A \cap B) = \partial A \cap \partial B$ eşitliğinin yanlış olduğunu gösteren reel sayı doğrusundan basit bir karşı örnek veriniz.

Çözüm: $A = (0,1)$ ve $B = (1,2)$ alırsak yanlış olduğu görülür.

1.13. Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

i) $(\overline{A})^t = (A^t)^0$ yani $X - \overline{A} = (X - A)^0$
ii) $(A^0)^t = \overline{A^t}$ yani $X - A^0 = (X - \overline{A})$

olur.

İspat: i) $\exists\ T \in \tau$ için

$$\begin{aligned} x \in (\overline{A})^t &\Leftrightarrow x \notin \overline{A} \\ &\Leftrightarrow x \in T \wedge (T \cap A \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow x \in T \wedge T \subset A^t \\ &\Leftrightarrow x \in (A^t)^0 \end{aligned}$$

olur. O halde $(\overline{A})^t = (A^t)^0$ yani $X - \overline{A} = (X - A)^0$ dir.

ii) $\forall\ T \in \tau$ için

$$\begin{aligned} x \in (A^0)^t &\Leftrightarrow x \notin A^0 \\ &\Leftrightarrow x \in T \Rightarrow (T \cap A^t \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A^t} \end{aligned}$$

olur. O halde $(A^0)^t = \overline{A^t}$ yani $X - A^0 = (X - \overline{A})$ dir.

1.14. Teorem: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Bu durumda

i) $U \subset A$ ve U, X'de açık ise $U \subseteq A^0$
ii) $A \subset B$ ise $A^0 \subset B^0$
iii) A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart $A = A^0$
iv) $(A^0)^0 \subset A$
v) $(A^0)^0 = A^0$
vi) $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$
vii) $A^0 \cup B^0 \subset (A \cup B)^0$

olur.

İspat:

i) U, X de açık alt küme ve $U \subset A$ olsun. A^0, A kümesinin kapsadığı tüm açık alt kümelerin birleşimi olduğundan $U \subseteq A^0$ dir.

ii) $A \subset B$ olduğundan A^0, B tarafından kapsanan açık kümedir. Yani $A^0 \subset A \subset B$ dir. (i) kısmından, B tarafından kapsanan her açık küme, B^0 tarafından kapsanır. Böylece $A^0 \subset B^0$ dir.

iii) $\Rightarrow$: A kümesi açık olsun. $A = A^0$ olduğunu göstereceğiz. A^0 tanımından, $A^0 \subset A$ dir. Ayrıca A, kendisi tarafından kapsanan açık küme olduğundan, $A \subset A^0$ dır. Sonuç olarak, $A = A^0$ olur.

$\Leftarrow$: $A = A^0$ise A açık kümedir. Tanımdan, A^0 bir açık kümedir.

iv, v, vi okuyucuya bırakılmıştır.

vii) $\exists\, T_1, T_1 \in \tau$ için

$$
\begin{aligned}
x \in (A^0 \cup B^0) &\Rightarrow (x \in A^0) \vee (x \in B^0) \\
&\Rightarrow (x \in T_1 \subset A) \vee (x \in T_2 \subset B) \\
&\Rightarrow x \in T_1 \cup T_2 \subset A \cup B \\
&\Rightarrow x \in (A \cup B)^0
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek: $\mathbb{R}$ in standart topolojisinde $A = (0,1]$ ve $B = (1,2)$ alalım. Bu durumda $(A \cup B)^0 = (0,2)^0 = (0,2)$ dir. Fakat $A^0 \cup B^0 = (0,1) \cup (1,2)$ dir. Bu da $A^0 \cup B^0 \subset (A \cup B)^0$ olduğunu gösterir.

Kazimierz Kuratowski
02 Şubat 1896, Varşova, Polonya-18 Haziran 1980, Varşova, Polonya

Şimdi verilecek olan teorem (i), (ii) ve (v) şıklarına Kuratowski Kapanış Aksiyomları adı verilir.

1.15. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Bu durumda

i) $\overline{\varnothing} = \varnothing$

ii) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

iii) $A \subset C$ ve C, X'de kapalı ise $\overline{A} \subseteq C$ dir.
iv) $A \subset B$ ise $\overline{A} \subset \overline{B}$ dir.
v) A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $A = \overline{A}$
vi) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
vii) $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

olur.

İspat: i, ii ve iii okuyucuya bırakılmıştır.

iii) C, X'de kapalı ve $A \subset C$ olsun. $\overline{A}$, A kümesini içeren tüm kapalı kümelerin arakesiti olduğundan, $\overline{A} \subseteq C$ olur.

iv) $A \subset B$ olduğundan $\overline{B}$, A kümesini kapsayan kapalı kümedir. (d) kısmından, $\overline{A} \subset \overline{B}$ dir.

v) $\Leftarrow$: A kümesi kapalı olsun. $A = \overline{A}$ olduğunu gösterecegiz. A tanımından, $A \subset \overline{A}$ dir. Ayrıca A, kendisini kapsayan kapalı küme olduğundan, $\overline{A} \subset A$ dir. Sonuç olarak, $A = \overline{A}$ olur.

$\Leftarrow$: $A = \overline{A}$ ise A kapalı kümedir. Tanımdan, $\overline{A}$ bir kapalı kümedir.

vi) $A \subset \overline{A}$ ve $B \subset \overline{B}$ olduğu için $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ olur. Burada iki kapalı kümenin bileşimi kapalı olduğu için $\overline{A \cup B}$ kümesi kapalı bir kümedir. Buna göre $\overline{A \cup B}$ kümesi $A \cup B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olduğu için $\overline{A} \cup \overline{B}$ kümesinden büyük olamaz. O halde $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ olmalıdır.

Öte yandan şu özelliği kullanalım. Eğer C ve D iki küme ve $C \subset D$ ise $C \subset \overline{D}$ olur. Ayrıca $A \subset A \cup B$ olduğu için $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ ve de $B \subset A \cup B$ olduğu için $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ olur ki bu iki şeyi birleştirirsek, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ olduğu çıkar.

$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ ve $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ olduğundan istenen eşitlik çıkar.

vii) Her $T \in \tau$ için

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\Rightarrow (x \in T \Rightarrow T \cap (A \cap B) \neq \varnothing) \\ &\Rightarrow (x \in T \Rightarrow [(T \cap A \neq \varnothing) \wedge (T \cap B \neq \varnothing)] \\ &\Rightarrow (x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B}) \\ &\Rightarrow x \in (\overline{A} \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

olur. O halde $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ dir.

Örnek: 1.5. teoremdeki vii. özelliği eşitlik için doğru değildir. Mesela, $\mathbb{R}$ in standart topolojisinde $A = (0,1)$ ve $B = (1,2)$ alalım. Bu durumda

$\overline{(A \cap B)} = \overline{\varnothing} = \varnothing$ dir, fakat $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$ dir. Yani bu örnek için $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ dir.

Örnek: Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu tümleyenler topoloji var olsun. $A = [0,1)$ alt kümesini ele alalım. $A = [0,1)$ alt kümesinin içerdiği açık küme mevcut olmadığından $A^0 = \mathbb{R}$ dir. Bu topolojiye göre sonlu olmayan kapalı küme sadece reel sayılar kümesi olduğundan $\overline{A} = \mathbb{R}$ dir.

Örnek: Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde alt limit topoloji var olsun. $A = [0,1)$ alt kümesini ele alalım. Bu topolojiye göre A açık olduğundan $A^0 = A$ dir. Yine aynı topolojiye göre $\mathbb{R} - A = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık olduğundan A, bu topolojiye göre kapalıdır. Yani, $A = \overline{A}$ dir.

Örnek: Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde standart topoloji var olsun. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ yu inceleyelim. $\mathbb{Q}^0 = \varnothing$ dir. Gerçekten, rasyonel sayılar kümesinin içinin boş olmadığını varsayalım. $\mathbb{Q}$ nun içerdiği boştan farklı açık küme U olduğunu varsayalım. $x \in U$ alalım. O zaman,

$$x \in (a, b) \subset U \subset \mathbb{Q}$$

olacak şekilde bir (a, b) açık aralığı vardır. Diğer taraftan, iki reel sayı arasında bir irrasyonel sayı vardır. Dolasıyla her aralık $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ kümesine ait elemanları içerir. Bu nedenle, U açık kümesi de bu elemanları içerir. Bu ise çelişkidir. Böylece $\mathbb{Q}^0 = \varnothing$ dir. ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ eşitliği de okuyucuya bırakılmıştır.)

Örnek: a) A açık bir küme ise $A \subset (\overline{A})^0$ olduğunu gösteriniz.

b) Açık olmayan bir A kümesi bulun öyle ki $(\overline{A})^0$ kümesi A'yı içine almasın. Reel sayı doğrusu üzerinde böyle bir örnek bulabilir misiniz?

Çözüm: a) $A \subset \overline{A}$ ve A açıktır. Tanım gereği, $(A)^0$ kümesi A kümesinin içindeki en büyük açık küme olduğu için A'yı kapsamalıdır.

b) Reel sayı doğrusunda $A = [0,1)$ alalım. Bu durumda, $\overline{A} = [0,1]$ ve $(A)^0 = (0,1)$ olur. $(A)^0$ kümesi A'yı kapsamıyor.

1.16. Teorem: X topolojik uzay, $A \subset Y \subset X$ olsun. A'nın Y'deki kapanışı $Y \cap \overline{A}$ ye eşittir.

İspat: C kümesi, A kümesinin Y alt uzayındaki kapanışı olsun. A kümesi X uzayında kapalı olduğundan $Y \cap \bar{A}$ kümesi Y alt uzayında kapalıdır. $A \subset Y \cap \bar{A}$ olduğundan $C \subset Y \cap \bar{A}$ olur.

Tersini gösterelim. C kümesinin tanımından C, Y alt uzayında kapalıdır. 1.5. teoremden $C \subset Y \cap C^t$ olacak şekilde X uzayında C^t kapalı alt kümesi vardır. Böylece $A \subset Y \cap C^t$ dir. $\bar{A}$ nın tanımından ve C^t kümesini A kümesini içeren X uzayının kapalı alt kümesi olduğundan $\bar{A} = C^t$ dir. Dolasıyla,

$$Y \cap \bar{A} \subset (Y \cap C^t)$$
$$Y \cap \bar{A} \subset C$$

olur. O halde $C = Y \cap \bar{A}$ dir.

1.17. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, A, herhangi bir küme ve K kapalı bir küme olsun. Eğer $A \cup K = X$ ise $A^0 \cup K = X$ dır.

İspat: $A \cup K = X$ ve $A^0 \cup K \neq X$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in A - A^0$ ve $x \notin K$ olacak biçimde bir $x \in X$ olmalıdır. Yani, K^t kümesi açık olduğundan $x \in T \subset K$ olacak biçimde açık bir T kümesi var olmalıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} A \cup K = X &\Rightarrow A^t \cup K^t = \varnothing \\ &\Rightarrow K^t \subset (A^t)^t \\ &\Rightarrow K^t \subset A \\ &\Rightarrow x \in T \subset K^t \subset A \\ &\Rightarrow x \in A^0 \end{aligned}$$

olur. O halde $x \in A^0 \cup K$ olacaktır. Öyleyse $A^0 \cup K = X$ dir.

1.18. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. Bu durumda, $x \in \bar{A}$ ancak ve ancak x elemanını içeren her $U \in \tau$ kümesi A alt kümesi ile kesişimi boş kümeden farklıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $x \in \bar{A}$ ile $x \in U$ ve $A \cap U = \varnothing$ olacak şekilde $U \in \tau$ olsun. O halde, $X - U$ kapalı kümesi A'yı içerir. Dolasıyla, $\bar{A} \subset X - U$ olur. $x \in U$ olduğundan $x \notin X - U$ olur. Buradan $x \notin \bar{A}$ olup çelişkidir. O halde $A \cap U \neq \varnothing$ dir.

$\Leftarrow$: $x \notin \bar{A}$ ise $U = X - \bar{A}$ olmak üzere $x \in U$ dur. $U \in \tau$ olduğundan hipoteze göre U kümesi A ile kesişimi boş küme değildir. Yani $A \cap (X - \bar{A}) \neq \varnothing$ tur. Bu ise, bir çelişkidir. Böylece, $x \in A$ dir.

1.19. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. O halde, $x \in \partial A$ olması için gerek ve yeter şart

$$x \in A \cap (X - A) \neq \varnothing$$
olmalıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $x \in \partial A$ olsun. Tanımdan, $x \in \overline{A}$ ve $x \notin A^0$ dir. $x \in \overline{A}$ olduğundan x noktasının her komşuluğu A kümesi ile kesişmesi boş küme değildir. Diğer taraftan, $x \notin A^0$ olduğundan x noktasının her komşuluğu A kümesinin bir alt kümesi değildir. Böylece bu komşuluk $X - A$ ile kesiştiği nokta boş kümeden farklıdır. Yani $x \in A \cap (X - A) \neq \varnothing$ dir.

$\Leftarrow$: $x \in A \cap (X - A) \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. $x \in \overline{A}$ ve $x \in \overline{(X - A)}$ dir. 1.11. Teorem (ii) kısmından,
$$\overline{X - A} = (X - A)^0$$
dir. Böylece, $x \in \overline{A}$ ve $x \notin A^0$ dir. O halde $x \in \overline{A} - A^0 = \partial A$ dir.

1.20. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun.
i) $\partial A^0 \subset \partial A$
ii) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$
iii) $\text{Dış}(A \cup B) \subset \text{Dış}(A) \cup \text{Dış}(B)$
iv) $A^0 = A - (A \cap \partial A)$
v) $A \cap \partial A = \varnothing \Leftrightarrow A \in \tau$
vi) $\partial A \subset A \Leftrightarrow A$ kapalıdır.

İspat:

$$\begin{aligned} \text{i) } x \in \partial A^0 &\Rightarrow x \notin (A^0)^0 \wedge x \notin ((A^0)^t)^0 \\ &\Rightarrow x \notin A^0 \wedge x \notin ((A^t)^0)^0 \\ &\Rightarrow x \notin A^0 \wedge x \notin (A^t)^0, \quad ((A^t)^0 \subset (A^0)^t) \\ &\Rightarrow x \in \partial A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{ii) } x \in \partial(A \cup B) \Rightarrow x \notin (A \cup B)^0 \vee x \notin ((A \cup B)^t)^0 \\ &\Rightarrow (x \notin A^0 \cup B^0) \vee (x \notin (A^t \cap B^t)^0), \quad (A \cap B \subset A \cup B) \\ &\Rightarrow (x \notin A^0 \cap B^0) \vee (x \notin (A^t \cap B^t)^0) \\ &\Rightarrow (x \notin A^0 \wedge x \notin B^0) \vee (x \notin ((A^t)^0 \cap (B^t)^0)) \\ &\Rightarrow (x \notin A^0 \wedge x \notin B^0) \vee (x \notin (A^t)^0 \wedge (x \notin (B^t)^0) \\ &\Rightarrow (x \notin A^0 \wedge x \notin (A^t)^0) \vee (x \notin B^0 \wedge (x \notin (B^t)^0) \\ &\Rightarrow (x \in \partial A) \vee (x \in \partial B) \\ &\Rightarrow x \in (\partial A \cup \partial B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } x \in \text{Dış}(A \cup B) &\Rightarrow x \in ((A \cup B)^t)^0 \\ &\Rightarrow x \in (A^t \cap B^t)^0 \\ &\Rightarrow x \in [(A^t)^0 \cap (B^t)^0] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in (A^t)^0 \wedge x \in (B^t)^0$$
$$\Rightarrow x \in \text{Dış}(A) \wedge x \in \text{Dış}(B)$$
$$\Rightarrow x \in [\text{Dış}(A) \cap \text{Dış}(B)]$$

iv) $x \in A^0 \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \partial A$
$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin [A \cap \partial A]$
$\Leftrightarrow x \in A - [A \cap \partial A]$

v) $A \cap \partial A = \emptyset \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin \partial A \Leftrightarrow x \in A^0 \Leftrightarrow A \in \tau$

vi) $\partial A \subset A \Leftrightarrow (x \in \partial A \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow (x \in A^t \Rightarrow x \notin \partial A)$
Bu ise $\exists\, T \in \tau$ için
$x \in A^t \Leftrightarrow x \in (T \subset A^t) \cap (T \cap A = \emptyset)$
$\Leftrightarrow x \in (T \subset A^t) \wedge\ x \in (T \cap A = \emptyset)$
$\Leftrightarrow x \in (A^t)^0$
yazılabilir. Bu ise, bir kümenin A kümesinin kapalı olması için bütün kenar noktalarını içermesinin gerekli ve yeterli olduğunu söyler.

1.21. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.
i) $\overline{A} = A^0 \cup \partial A$
ii) $\partial A = \partial(X - A)$
iii) $\overline{A} - \partial A = A^0$
iv) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(A^t)}$

İspat: i) $x \in \overline{A}$ ve $x \notin \partial A$ olduğunu varsayalım. $x \notin \partial A$ olduğundan $U \subset A$ veya $U \subset X - A$ olacak şekilde x noktasını içeren bir U açık kümesi vardır. $U \subset X - A$ ise $X - U$ kümesi A kümesini içeren bir kapalı kümedir. Dolasıyla, $\overline{A} \subset X - A$ dir. Bu ise $x \in \overline{A}$ ile çelişir. U açık kümesi A kümesi tarafından kapsanmalıdır. Bu nedenle, $x \in A^0$ dir. Sonuçta,
$$\overline{A} \subset A^0 - \partial A$$
dir. $x \in A^0 \cup \partial A$ fakat $x \notin \overline{A}$ olduğunu varsayalım. $A^0 \subset A \subset \overline{A}$ olduğundan $x \in \partial A$ dir. $x \notin \overline{A}$ olduğundan x noktasını içermeyen fakat A kümesini içeren bir F kapalı kümesi vardır. O halde, $X - F$ kümesi x elemanını içeren açık küme fakat bu küme A ile kesişme noktası yoktur. Böylece, x elemanı ∂A ne ait değildir, bu bir çelişkidir. Bu nedenle $x \in \overline{A}$ ve $A^0 \cup \partial A \subset \overline{A}$ dir. Sonuç olarak, $\overline{A} = A^0 \cup \partial A$ dir.

ii) $x \in \partial A$ olsun. O halde, x noktasını içeren bir U açık kümesi, A ve $X - A$ her ikisi ile kesişir. Böylece $x \in \partial(X - A)$ dir. Benzer şekilde $x \in \partial(X - A)$ ise $x \in \partial A$ dir.

iii) $A^0 \cup \partial A = \emptyset$ olduğunu gösterirsek sonucu (i) kısmından elde ederiz. $A^0 \cup \partial A \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. x bu kesişimde bir eleman olsun. $x \in \partial A$ olduğundan, x noktasını içeren her açık küme $X - A$ ile kesişimi boş küme değildir. Diğer taraftan, $x \in A^0$ olduğundan $U \subset A$ olacak şekilde x elemanını içeren bir U açık kümesi vardır. x elemanın hem A^0 hemde ∂A de olması mümkün değildir.

iv) $\forall\ T \in \tau$ için

$$x \in \partial A \Leftrightarrow (x \in T \Rightarrow [(T \cap A \neq \emptyset) \vee (T \cap A^t \neq \emptyset)]$$

olduğunu biliyoruz. $x \notin A^0$ olduğunu göstermek için olmayana Ergi yöntemini kullanalım. Eğer $(x \in \partial A) \wedge (x \in A^0\ )$ olsaydı $\exists\ T \in \tau$ için

$$x \in T\ \wedge T \subset A$$

olurdu. Bu durumda $x \notin \partial A$ olması gerekirdi. Demek ki $x \in A^0$ olamaz. O halde $x \in \overline{A} - A^0$ dır.

1.5. Sonuç: (X, τ) bir topolojik uzay ve A kümesi X in alt kümesi olsun.

i. ∂A kümesi kapalıdır.

ii. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$

iii. $\partial A \subset A$ olması için gerek ve yeter şart A kümesinin kapalı olmasıdır.

iv. $\partial A \cap A^0\ = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart A kümesinin açık olmasıdır.

Örnek: Yukarıdaki sonucun (iv) özelliği iç için doğru değildir. Yani B'nin A'daki içini B_A^0 ile, X'deki içini B^0 ile gösterirsek B_A^0 ile $B^0 \cap A$ farklı olabilir. Çok basit bir karşı örnek: $B = A = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $X = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. Standart topolojiyi düşünelim. Bu durumda $\mathbb{Q}$ nun kendisine göre içi kendisi olacağından $\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}}^0\ = \mathbb{Q}$ olur. Fakat $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ ye göre içi boş kümedir. O halde $\mathbb{Q}^0\ \cap \mathbb{R} = \emptyset$ olur. Ve böylece $\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}}^0\ \neq \mathbb{Q}^0\ \cap \mathbb{R}$ dir.

1.6. Sonuç: $B \subset A \subset X$ şeklinde olsun. B'nin A'daki kapanışını $\overline{B_A}$ ile, X'deki kapanışını $\overline{B}$ ile gösterirsek $\overline{B_A}\ \ = \overline{B} \cap A$ olur.

1.7. Sonuç: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun.

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow \partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$$

dir.

1.22. Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun.

i) $A \subset B \Rightarrow (\overline{A})^0 \subset (\overline{B})^0$
ii) $A \subset B \Rightarrow \overline{A^0} \subset \overline{B^0}$
iii) A açık ise $A \subset (\overline{A})^0$
iv) A kapalı ise $\overline{(A^0)} \subset A$

İspat:
i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \Rightarrow (\overline{A})^0 \cup (\overline{B})^0$
ii) $A \subset B \Rightarrow A^0 \subset B^0 \Rightarrow (\overline{A})^0 \cup (\overline{B})^0$

iii) $A \in \tau$ ise $A = A^0$ olduğundan

$$A \subset \overline{A} \Rightarrow A^0 \subset (\overline{A})^0 \Rightarrow A \subset (\overline{A})^0$$

olur.

iv) $A \in \tau$ ise $A = \overline{A}$ olduğundan

$$A^0 \subset A \Rightarrow \overline{(A^0)} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{(A^0)} \subset A$$

olur.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

Topolojinin Tanımı

1. Her $r \in \mathbb{R}^+$ için

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + x^2 < r\}$$

olsun. $\tau = \{D_r : r \in \mathbb{R}^+\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ kolleksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir topolojidir.

Çözüm:
(T1) τ'nun tanımından $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \tau$ dir.

(T2) $D_{r_1}, D_{r_2} \in \tau$ olsun. $r = \min\{r_1, r_2\}$ alalım. Bu takdirde, $D_r \in \tau$ dir

(T3) Her $i \in I$ için $D_{r_i} \in \tau$ alalım. $r_0 = \text{Sup}\{r_i : \ i \in I\}$ ise $\bigcup_{i \in I} A_{r_i} = A_{r_0} \in \tau$ dir.

2. $X = \{a, b, c\}$ kümesinin, 6 elemanlı ve 7 elemanlı bir topolojisini bulunuz.

Çözüm: 6 elemanlı topoloji $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ dir. Ama 7 elemanlı bir topoloji yazılamaz.

3. X kümesi 100 elemanlıdır. Bu kümenin $2^{100} - 1$ tane alt küme içeren topolojisi olamaz. Gösteriniz.

Çözüm: Soruda, 100 elemanlı bir küme için kuvvet kümesi olan $P(X)$ kuvvet kümesinden bir eleman çıkararak topoloji elde edemeyeceğimizin ispatlanması isteniyor... Eğer çıkardığımız küme tek nokta kümesi değilse, yani tek nokta kümeleri topolojinin içindeyse bu topoloji ayrık topoloji olur ve 2^{100} elemanlıdır ve küme çıkaramayız. O halde eğer küme çıkaracaksak önce tek nokta kümelerinden başlamalıyız. Örneğin, $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ kümesi olsun ve $\{1\}$ kümesini $P(X)$ kümesinden sildiğimizi düşünelim. Geriye kalan koleksiyon topoloji olamaz. Çünkü geriye kalan koleksiyonda $\{1, 2\}$ ve $\{1, 3\}$ kümeleri vardır ve topolojinin 2. şartından dolayı $\{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\}$ kümesinin de iddia edilen topolojide olması gerekir. Fakat o çıkartılmıştı. Dolayısıyla $\{1\}$ kümesini $P(X)$ kümesinden çıkardığımızda kalan koleksiyon topoloji değildir. Fakat aynı işlem, $\{2\}, \{3\}, \ldots, \{100\}$ tek nokta kümeleri içinde geçerli. O halde, 100 elemanlı bir kümenin $2^{100} - 1$ elemanlı topolojisi yoktur.

4. İki elemanlı bir küme üzerinde kaç değişik topoloji vardır?

Çözüm: İki elemanlı $X = \{0, 1\}$ kümesini alalım.
$\tau_1 = \{\emptyset, X\}, \tau_2 = \{\emptyset, X, \{0\}\}, \tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, X\}, \tau_4 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$ kolleksiyonları X üzerinde birer topoloji olup 4 tanedir. Bu topolojilerden τ_1 e aşikar topoloji, τ_2 ile τ_3 Sierpinski ve τ_4 ayrık topoloji topolojisi olarak adlandırılır.

5. $X = \{1, 2, 3\}$ olsun. X'in iki tane dört elemanlı topolojisi

$$\tau_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\} \text{ ve } \tau_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, X\}$$

topolojileri veriliyor.

a) τ_1 ve τ_2 'yi kapsayan en küçük τ_{min} topolojisini yazınız.
b) τ_1 ve τ_2 tarafından kapsanan en büyük τ_{max} topolojisini yazınız.

Çözüm: a) $\tau_{min} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, X\}$
b) $\tau_{max} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$

Topolojide Açık ve Kapalı Kümeler

6. X herhangi bir küme ve Y topolojik bir uzay olsun. $f: X \to Y$ fonksiyon olsun. V açık küme ve $V \subset Y$ için, eğer $f^{-1}(V)$, X üzerinde bir topolojik yapı oluşturur.

Çözüm: (T1) (Y, V) topolojik uzay olduğundan, Y ve $\varnothing \in V$ olur. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ ve $f^{-1}(Y) = X$ olduğundan $\varnothing, X \in f^{-1}(V)$ olur.

$f^{-1}(V)$ kümeler ailesi (T2) ve (T3) aksiyomlarını sağlar. Şu halde $f^{-1}(V)$ ailesi X kümesi üzerinde topolojidir.

İç, Dış, Kapanış ve Sınır

7. $X = \{a, b, c\}$ olmak üzere,

$\tau_1 = \{\varnothing, \{c\}, \{b, c\}, X\}$

$\tau_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$

$\tau_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$

topolojileri veriliyor. $L = \{a, b\}$ ve $M = \{a, c\}$ kümelerinin kapanışlarını bulunuz.

Çözüm:

τ_1 için $\bar{L} = X$ ve $\bar{M} = M$

τ_2 için $\bar{L} = X$ ve $\bar{M} = M$

τ_3 için $\bar{L} = L$ ve $\bar{M} = X$

8. Aşağıda $\mathbb{R}^2$ nin bazı alt uzayları verilmiştir. Bu uzayların iç, kapanış ve sınırlarını bulunuz.

a) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

b) $B = \mathbb{Q} \times \{y : y \in \mathbb{R}^+\}$

c) $C = \{(x,y) : x \geq 0 \text{ ve } x^2 + y^2 < 1\} - \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$

Çözüm:

a) $A^0 = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Q})^0 = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Q}^0 = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$

$\bar{A} = \bar{\mathbb{Z}} \times \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

$\partial A = \bar{A} - A^0 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} - \varnothing = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$

b) $B^0 = \mathbb{Q}^0 \times \{y : y \in \mathbb{R}^+\}^0 = \varnothing \times \{y : y \in \mathbb{R}^+\} = \varnothing$

$\bar{B} = \bar{\mathbb{Q}} \times \overline{\{y : y \in \mathbb{R}^+\}} = \mathbb{R} \times \{y : y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$

$\partial B = \overline{B} - B^0 = \overline{B}$

c) $C = \{(x,y) : \ x \geq 0 \text{ ve } x^2 + y^2 < 1\} - \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : \ n \in \mathbb{Z}^+\right\}$

$C^0 = \{(x,y) : \ x > 0 \text{ ve } x^2 + y^2 < 1\}$

$\overline{C} = \{(x,y) : \ x \geq 0 \text{ ve } x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\partial C = \{(x,y) : \ x \geq 0 \text{ ve } x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,y) : \ -1 \leq y \leq 1\}$

9. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ olacak şekilde iki $A, B \subset \mathbb{R}$ kümesi bulunuz.

Çözüm: $A = (0,1), B = (1;\ 2)$ alalım.
$\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing$ fakat $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$
olur ve $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ sağlanır.

10. X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\overline{[A^t]}^t$ ifadesinin en sade hali nedir?

Çözüm: $\overline{[A^t]}^t = [(A^0)^t]^t = A^0$

11. τ_k, X üzerinde aşikar topoloji olsun. $A \subset X$ için;

$$A^0 = \begin{cases} \varnothing, & A \neq X \\ A, & A = X \end{cases} \text{ ve } \overline{A} = \begin{cases} \varnothing, & A = X \\ A, & A \neq X \end{cases}$$

olur.

12. X sonlu olmayan bir küme ve X üzerindeki topoloji sonlu tümleyenler topolojisi olsun. $A \subset X$ için

$$A^0 = \begin{cases} \varnothing, & A^t \text{ sonsuz} \\ A, & A^t \text{ sonlu} \end{cases} \text{ ve } \overline{A} = \begin{cases} A, & A \text{ sonlu} \\ X, & A \text{ sonsuz} \end{cases}$$

olur.

13. τ_k, X üzerinde aşikar topoloji olsun. $A \subset X$ için;

$$A^0 = \begin{cases} \varnothing, & A \neq X \\ A, & A = X \end{cases}, \ \overline{A} = \begin{cases} \varnothing, & A = \varnothing \\ X, & A \neq \varnothing \end{cases} \text{ ve } \partial A = \begin{cases} \varnothing, & A = X, A = \varnothing \\ X, & A \neq X, A \neq \varnothing \end{cases}$$

olur.

14. X sonlu olmayan bir küme ve X üzerindeki topoloji sonlu tümleyenler topolojisi olsun. $A \subset X$ için;

$$A^0 = \begin{cases} \varnothing, & A^t \text{ sonsuz} \\ A, & A^t \text{ sonlu} \end{cases}, \quad \overline{A} = \begin{cases} A, & A \text{ sonlu} \\ X, & A \text{ sonsuz} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \partial A = \begin{cases} A, & A \text{ sonlu} \\ A^t, & A^t \text{ sonlu} \end{cases}$$

15. $U \subset \mathbb{R}$ bir açık küme olsun. $\overline{U \cap \mathbb{Q}} = \overline{U}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\overline{U \cap \mathbb{Q}} \subset \overline{U} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \overline{U} \cap \mathbb{R} = \overline{U}$ olduğu için $\overline{U \cap \mathbb{Q}} \subset \overline{U}$ olur. O halde sadece $\overline{U} \subset \overline{U \cap \mathbb{Q}}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x \in U$ olsun. Bu durumda, x noktası U kümesinin limit noktasıdır. Yani x'in her V açık komşuluğu U kümesini keser. Yani $\exists\, y \in U$ öyle ki $y \in U \cap V$ dir. Şimdi U ve V açık olduğu için $U \cap V$ kümesi açıkdır. O halde, açık kümenin karakterizasyonundan, $\exists\, \delta > 0$ öyle ki $(y-\delta, y+\delta) \subset U \cap V$ dir. Fakat elbette reel sayı doğrusunun her açık aralığı rasyonel sayıda içerdiğinden, $(y-\delta, y+\delta) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ ve dolayısıyla $U \cap V \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ olur. Bu ise x'in her açık komşuluğu $V \cap \mathbb{Q}$ yu keser. Yani $x \in \overline{U \cap \mathbb{Q}}$ dir. Böylece, $\overline{U} \subset \overline{U \cap \mathbb{Q}}$ olduğu da gösterilmiş oldu.

16. Her $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ olmak üzere $\mathbb{N}$ üzerindeki topoloji

$$\tau = \{A_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{N}\}$$

olsun. $A = \{1, 2, 3, 5, 10\}$ alalım. $A^0 = \{1, 2, 3\}$ dir, çünkü A_3, A kümesini içeren en büyük açık kümedir. A kapalı değildir, çünkü tümleyeni açık değildir.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Hüseyin Çakallı, Ders Notları, Maltepe Üniversitesi, 2019, İstanbul.
2. Prof. Dr. Ahmet Turan Gürkanlı, Genel Topoloji, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, 1993, Samsun.
3. Prof. Dr. Timur Karaçay, Genel Topoloji, Başkent Üniversitesi, 2010, Ankara.
4. Doç.Dr. Mehmet Kırdar, Genel Topoloji Ders Notları, Namık Kemal Üniversitesi, 2013, Tekirdağ.
5. Prof. Dr. İsmet Karaca, Topoloji, Palem Yayınevi, 2013, Ankara.
6. Prof. Dr. Zafer Eren, Genel Topoloji, Nesil Yayıncılık, 2020, Bolu.
7. Doç. Dr. Mehmet Emin Bozhüyük, Genel Topoloji'ye Giriş, Atatürk Üniversitesi Basımevi, 1984. Erzurum.
8. Prof. Dr. Z. Asuman Ilgaz, Genel Topolojiye Giriş, Marmara Üniversitesi Yayın No: 446, 1987, İstanbul.
9. Gerald A. Edgar, Çev. Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu, Ölçü, Topoloji ve Fraktal Geometri, Nobel Yayınları, 2006, Ankara.