1. BÖLÜM
METRİK UZAYLARA GİRİŞ

METRİK (MESAFE, UZAKLIK, ÖLÇÜMLÜ) UZAY KAVRAMI

Reel veya kompleks analizdeki dizilerin yakınsaklığı ve sürekliliği tanımlarını hatırlayalım. Dikkat edersek her iki tanımda da uzaklık kavramı rol oynamıştır. Dizinin yakınsaklığında, (x_n) ile x arasındaki uzaklık söz konusu olmuştur. Süreklilikte ise x ile x_0 ve $f(x)$ ile $f(x_n)$ arasındaki uzaklık işin içine girmiştir. Reel sayılar, reel doğru üzerindeki noktalar olarak düşünüldüğünde x ile y arasındaki uzaklık $|x-y|$ sayısıdır. Bunu her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) = |x-y|$$

şekline dönüştürelim. Kompleks sayılar, kompleks doğru üzerindeki noktalar olarak düşünüldüğünde $x=(x_1,x_2) \in \mathbb{C}$ ile $y=(y_1,y_2) \in \mathbb{C}$ olmak üzere x ile y arasındaki uzaklık

$$d(x,y) = d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

şeklinde olur.

Şimdi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ yerine herhangi bir X kümesini alalım. Burada X kümesinin elemanlarının mahiyeti bilinmeyen soyut küme olsun. Mesela, X kümesinin elemanları sayılar, fonksiyonlar, diziler v. s, olabilir. Üstelik bu kümelerin elemanları $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ de olduğu gibi cebirsel bir yapıya sahip olmasın. X kümesinde genellik söz konusu olsun. Bu kümeden alınan (x_n) dizisi kabul edelim ki x noktasına yakınsasın. Buna göre x_n ile x arasındaki uzaklığın ne olduğunun bilinmesi gerekir. Şimdi burada sorumuz şu olsun "Herhangi bir X kümesindeki iki eleman arasındaki uzaklık kavramının nasıl olur." İşte bu ihtiyacı gidermek için metrik uzayları tespit edilmiştir.

Burada şu tespitleri yapmakta fayda var. Reel veya kompleks sayılar teorisinde bir çok netice $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$'nin cebirsel özelliklerine bağlıdır. Mesela n. dereceden polinomu kompleks sayıların toplamı ve çağrımı yardımıyla teşkil edildiğinden burada yatan esas fikir cebirseldir. Bununla beraber analizde birçok netice $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$'nin cebirsel yapısına bağlı değildir. Mesela limit ve süreklilik kavramları topolojik kavramlardır. Çünkü limit ve süreklilik $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^2$ 'deki yapıya göre tarif edilir ve tariflerde esas olan husus $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$'de x ve y aralarındaki uzaklıktır. (x_n) bir reel dizisi x'e yakınsasın $(x \in \mathbb{R})$ olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\exists\, n_0(\varepsilon) \ni \forall n > n_0(\varepsilon) \text{ için } |x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow x_n \longrightarrow x$$

dir. Aynı şekilde $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere A'da tanımlı reel değerli bir f fonksiyonunu göz önüne alalım. $x_0 \in A$ olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\exists\, n_0(\varepsilon) \ni |x_n - x| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$$

ise f fonksiyonuna A'da süreklidir denir.

Başlangıçta bu iki tanımı hatırlatmamızın sebebi dikkatimiz bir noktaya çekmektir. Dikkat edilirse burada her iki tanımda da uzaklık kavramı rol oynamıştır. Dizinin yakınsaklığında x_n ile x arasındaki uzaklık söz konusu olmuştur. Süreklilikte ise x ile x_0 ve $f(x_n)$ ve f(x) arasındaki uzaklık işin içine girmiştir. İşte matematiğin birçok dalında soyut olmayan kümelerin yanı sıra soyut olan bir kümenin elemanlarına uygulanabilir bir uzaklık kavramına ihtiyaç duyulmuş ve ihtiyaç bu kavram üç esas özelliğe dayandırılmış ve bu kavram sayesinde ispatlar çok daha kolay olmuştur.

Maurice René Fréchet
02 Eylül 1878, Maligny, Fransa - 04 Haziran 1973, Paris, Fransa

1.1. Tanım: $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu tanımlansın. Her $x, y, z \in X$ için

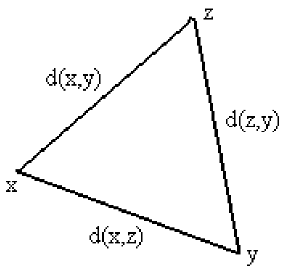
(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

aksiyomunu sağlayan d fonksiyonuna X'de metrik (uzaklık fonksiyonu) ve (X,d) çiftine de metrik uzay denir. (X,d) ikilisini biz genellikle sadece X ile göstereceğiz. Buna göre X metrik uzayı denildiğinde (X,d) ikilisini kast ettiğimiz anlaşılmalıdır.

Burada (M1) aksiyomu bir noktanın kendisine olan uzaklığının 0 olduğunu ifade eder.

(M2) aksiyomu x'in y'ye olan uzaklığı ile y'nin x'e olan uzaklığının aynı olduğunu ifade eder. Bu aksiyoma "simetri özelliği" denir.

(M3) aksiyomu ise düzlemde bir doğru üzerinde bulunmayan farlı üç noktalar yardımla oluşturulan üçgenin bir kenarının uzunluğunun diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük olduğunu gösterir. Bu aksiyomuna "üçgen eşitsizliği" de denilir. (M3) aksiyomuna üçgen eşitsizliği denilmesinin sebebi geometriden kaynaklanmaktadır. Çünkü "Düzlemde çizilen bir üçgende, bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunluğundan küçüktür" teoremi bunu ifade etmektedir.



Ayrıca şunu da söylemek gerekir ki, Metrik fonksiyonu hiçbir zaman negatif değildir. Çünkü bazı kitaplarda "Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$" şeklinde dördüncü bir aksiyom tanımlamaktalar. Halbuki (M1), (M2) ve (M3) den bu aksiyom elde edilmektedir. Gerçekten, her $x, y \in X$ için

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$$

elde edilir ki bu bize (M1), (M2) ve (M3) özelliklerinden her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ olduğu ortaya çıkar. Buna göre (M1), (M2) ve (M3) aksiyomlarının olması bu dördüncü aksiyomun mutlak surette var olması demektir. O halde bu dördüncü aksiyoma gerek yoktur.

Örnek (Alışılmış Metrik):

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \\ (x, y) &\to d(x, y) = |x - y| \end{aligned}$$

şeklindeki $\mathbb{R}$ reel doğrusu üzerinde tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir.

Çözüm: Her $x, y, z \in X$

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$

(M3) Mutlak değerde üçgen eşitsizliğinden,

$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

elde edilir. (M1), (M2) ve (M3) aksiyomları sağlandığından d fonksiyonu R üzerinde bir metriktir. $(\mathbb{R}, d)$ de bir metrik uzaydır.

Örnek (Diskret Metriği): X boş olmayan herhangi bir küme olsun.

$d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$(x,y) \to d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde tanımlanan bir metriktir.

Çözüm: Her $x, y, z \in X$

(M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ olduğu tanımdan açıktır.

(M2) $x \neq y$ ise $d(x,y) = 1 = d(y,x)$
$x = y$ ise $d(x,y) = 0 = d(y,x)$
olduğundan $d(x,y) = d(x,y)$ dir.

(M3)
$x \neq y \neq z$ ise $d(x,y) = 1 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(z,y)$
$x = y \neq z$ ise $d(x,y) = 0 \leq 1 + 1 = d(x,z) + d(z,y)$
$x \neq y = z$ ise $d(x,y) = 1 \leq 1 + 0 = d(x,z) + d(z,y)$
$x = y = z$ ise $d(x,y) = 0 \leq 0 + 0 = d(x,z) + d(z,y)$

olduğundan $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dir. Buna göre (M1) (M2) ve (M3) aksiyomları sağlandığından d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. (X, d) de bir metrik uzaydır.

1.2. Tanım: Reel sayıların tüm sıralı n-lilerin kümesine n-boyutlu Euclid (Öklid) uzayı denir. $\mathbb{R}^n$ ile gösterilir. Buna göre

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall\, i = 1,2, \dots, n, x_i \in \mathbb{R}\}$$

dir.

Örnek ($\mathbb{R}^2$ de Euclid Düzlemi Metriği-1): $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere;

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$d(x, y) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan bir metriktir.

Bu örneğin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek ($\mathbb{R}^2$ Euclid Düzlemi Metriği-2): $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere;

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, (x, y) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan bir metriktir.

Çözüm: $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

(M1) $d(x, y) = 0$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0\\
&(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0\\
&(x_1 - y_1)^2 = 0 \text{ ve } (x_2 - y_2)^2 = 0\\
&x_1 - y_1 = 0 \text{ ve } x_2 - y_2 = 0\\
&x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 = y_2\\
&(x_1, x_2) = (y_1, y_2)\\
&x = y
\end{aligned}$$

(M2)
$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\\
&= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}\\
&= d(y, x)
\end{aligned}$$

(M3) Minkowski eşitsizliğinde özel olarak $p = q = 2$ seçilmek üzere

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - z_i + z_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{2} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)^2 \right)^{1/2} \quad \text{(Üçgen eşitsizliğinde)}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - z_i|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{2} |z_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{(Minkowski eşitsizliğinden)}$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

olduğundan $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dir. Buna göre (M1) (M2) ve (M3) aksiyomları sağlandığından $\mathbb{R}^2$ de tanımlı d fonksiyonu bir metrik belirler.

Örnek ($\mathbb{R}^n$ de Euclid Düzlemi Metriği):
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere;

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x,y) = d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan bir metriktir.

Bu örneğin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

1. 3. Tanım: Kompleks sayıların tüm sıralı n-lilerin kümesine n-boyutlu üniter uzayı denir. $\mathbb{C}^n$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \forall\, i = 1,2, \cdots, n, x_i \in \mathbb{C}\}$$

dir.

Örnek ($\mathbb{C}^n$ Üniter Uzayı Metriği):
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere

$$d: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x,y) = d((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{C}^n$ üzerinde tanımlanan bir metriktir. Bu örneğin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

1.4. Tanım: [a, b] aralığının üzerinde tanımlı t reel değişkenli ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye sürekli fonksiyonlar uzayı denir. C[a, b] ile gösterilir. Buna göre

$$C[a,b] = \{f : f[a,b] \to \mathbb{R}, \text{sürekli}\}$$

dir.

Örnek (Sürekli Fonksiyonlar Uzayının Metriği): Her $t \in [a,b]$, $x, y \in C[a,b]$ için

$$d :\ C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$$

ile verilen d fonksiyonu $C[a,b]$ üzerinde bir metrik belirler.

Çözüm: Her $t \in [a,b]$, $x, y, z \in C[a,b]$ için

(M1) $d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = 0$ olsun. Bu takdirde maksimumun tanımından dolayı $|x(t) - y(t)| \leq 0$ dır. Mutlak değer negatif olmayacağından için $|x(t) - y(t)| = 0$ dır. Bu ise

$$x(t) - y(t) = 0$$
$$x(t) = y(t)$$
$$x = y$$

olduğunu gösterir. Tersine olarak, $x = y$ olsun.

$$d(x,y) = d(x,x) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - x(t)| = 0$$

bulunur.

(M2) $d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = \max_{t\in[a,b]} |y(t) - x(t)| = d(y,x)$

(M3) Önce mutlak değerde üçgen eşitsizliğinden,

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$

yazılabilir. Bu iki ifadenin her iki yanının maksimumu alınırsa ve maksimumun özelliklerinden

$$\max_{t\in[a,b]} |x_i - y_i| \leq \max_{t\in[a,b]} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leq \max_{t\in[a,b]} |x_i - z_i| + \max_{t\in[a,b]} |z_i - y_i|$$

olduğundan $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dir. Buna göre (M1) (M2) ve (M3) aksiyomları sağlandığından d fonksiyonu bütün aksiyomları sağladığından $C[a,b]$ üzerinde bir metriktir.

1.5. Tanım: Bir A kümesi üzerinde tanımlı bütün sınırlı fonksiyonların uzayına sınırlı fonksiyonlar uzayı denir. $B(A)$ ile gösterilir. O halde bu uzay,

$$B(A) = \{x \mid x : A \to \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}, \sup_{t\in A} |x(t)| < \infty\}$$

biçimindedir.

Örnek (Sınırlı Fonksiyon Uzayı Metriği): Her $t \in A, x = x(t), y = y(t) \in B(A)$ için

$$d : B(A) \times B(A) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ d(x,y) = \sup_{t\in A} |x(t) - y(t)|$$

şeklindeki d fonksiyonu $B(A)$ üzerinde bir metriktir.

Çözüm: Her $t \in A, x = x(t), y = y(t), z = z(t) \in B(A)$ için

(M1) $d(x,y) = \sup_{t\in A} |x(t) - y(t)|$ olsun. Bu takdirde supremumun tanımından dolayı $|x(t) - y(t)| \leq 0$ dır. Mutlak değer negatif olmayacağından için $|x(t) - y(t)| = 0$ dır. Bu ise

$$x(t) - y(t) = 0$$
$$x(t) = y(t)$$
$$x = y$$

olduğunu verir. Tersine olarak, $x = y$ olsun.

$$d(x,y) = d(x,x) = \sup_{t\in A} |x(t) - x(t)| = 0$$

bulunur.

(M2)

$$d(x,y) = \sup_{t\in A} |x(t) - y(t)| = \sup_{t\in A} |-(y(t) - x(t))| = \sup_{t\in A} |y(t) - x(t)| = d(y,x)$$

(M3) Önce mutlak değerde üçgen eşitsizliğinden,

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$

yazılabilir. Bu iki ifadenin her iki yanının sup'u alınırsa ve supremumun özelliklerinden

$$\sup_{t\in A}|x(t)-y(t)|\le\sup_{t\in A}(|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)\le\sup_{t\in A}|x(t)-z(t)|+\sup_{t\in A}|z(t)-y(t)|$$

olduğundan $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ dir. Buna göre (M1) (M2) ve (M3) aksiyomları sağlandığından d fonksiyonu bütün aksiyomları sağladığından sınırlı fonksiyonlar üzerinde bir metriktir.

1.6. Tanım: Kompleks terimli tüm dizilerin kümesine dizi uzayı denir. s ile gösterilir. Buna göre;

$$s=\{x=(x_i):\forall\, i\in\mathbb{N}, x_i\in\mathbb{C}\}$$

dir.

Örnek (Dizi Uzayı Metriği): Her $x=(x_i), y=(y_i)\in s$ olmak üzere

$$d: s\times s\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}\,,\ d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i[1+|x_i-y_i|]}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu s üzerinde bir metriktir.

Çözüm: Her $x=(x_i), y=(y_i), z=(z_i)\in s$ için

(M1) $d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i[1+|x_i-y_i|]}=0$ ise her i için,

$$\frac{|x_i-y_i|}{2^i[1+|x_i-y_i|]}=0$$
$$|x_i-y_i|=0$$
$$x_i-y_i=0$$
$$x_i=y_i$$

bulunur. Buna göre $x=y$ dir. Tersine, $x=y$ ise

$$d(x,y)=d(x,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-x_i|}{2^i[1+|x_i-x_i|]}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|0|}{2^i[1+|0|]}=0$$

elde edilir.

(M2) $d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i[1+|x_i-y_i|]}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|y_i-x_i|}{2^i[1+|y_i-x_i|]}=d(y,x)$

(M3) Bu özelliği gösterebilmek için önce $t > 0$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{t}{1+t}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $f'^{(t)} = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ olduğundan f fonksiyonu artandır. Buna göre her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

olduğundan

$$f(|a + b|) \leq f(|a| + |b|) \tag{1}$$

yazabiliriz. f fonksiyonun tanımından

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \tag{2}$$

bulunur. Ayrıca "Yakınsak serilerin toplamları ayrı ayrı yazılabilir" teoremini hatırlayalım. Bu teoremden ve (2) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i[1+|x_i - y_i|]} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - z_i + z_i - y_i|}{2^i[1+|x_i - z_i + z_i - y_i|]} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{|x_i - z_i|}{2^i[1+|x_i - z_i|]} + \frac{|z_i - y_i|}{2^i[1+|z_i - y_i|]} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - z_i|}{2^i[1+|x_i - z_i|]} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z_i - y_i|}{2^i[1+|z_i - y_i|]} \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

olduğundan $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ dir. Bu bize (M3) özelliğinin sağlandığını gösterir. O halde d, s üzerinde metriktir.

1.7. Tanım: Reel veya kompleks terimli bütün yakınsak dizilerin kümesine yakınsak diziler uzayı denir. c ile gösterilir. Buna göre

$$c = \{x = (x_i) : \forall\, i \in \mathbb{N}, x_i \in c, x_i < \infty\}$$

dir.

Örnek (Yakınsak Dizi Uzayı Metriği): Her $x = (x_i), y = (y_i) \in c$ olmak üzere

$$d : c \times c \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i[1+|x_i - y_i|]}$$

$$(x,y) \to d(x,y) = |x_i - y_i|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu c üzerinde bir metriktir.

Bu örneğin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

David Hilbert
(23 Ocak 1862 Königsberg, Almanya-14 Şubat 1943 Göttingen, Almanya)

1.8. Tanım: $x = (x_n)$ Kompleks terimli bir dizi olmak üzere $p \geq 1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ olacak şekilde $x = (x_n)$ dizilerin uzayına ℓ_p uzayı denir.

$$\ell_p = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{C}, p \geq 1\}$$

dir. Özel olarak ℓ_2 uzayına Hilbert uzayı adı verilir.

Örnek ($\boldsymbol{\ell_p}$ Uzayı Metriği): Her $x = (x_i), y = (y_i) \in \ell_p$ olmak üzere

$$d: \ell_p \times \ell_p \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \; d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu ℓ_p üzerinde bir metriktir.

Çözüm: Her $x = (x_i), y = (y_i), z = (z_i) \in \ell_p$ için,

(M1) $d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} = 0$ olsun. Bu takdirde her i için

$$|x_i - y_i| = 0$$
$$x_i - y_i = 0$$
$$x_i = y_i$$

$$x = y$$

olduğunu verir. Tersine olarak, $x = y$ olsun.

$$d(x,y) = d(x,x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_i - x_i|^p\right)^{1/p} = 0$$

bulunur.

(M2) $$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_i - y_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_i - x_i|^p\right)^{1/p} = d(y,x)$$

(M3) Her n için $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty$ olduğundan Minkowski eşitsizliği gereği,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_i - z_i + z_i - y_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(|x_i - z_i| + |z_i - y_i|\right)^p\right)^{1/p} \\ &\le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_i - z_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|z_i - y_i|^p\right)^{1/p} \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

olduğundan $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ dir. Buna göre d fonksiyonu bütün aksiyomları sağlandığından ℓ_p üzerinde bir metriktir.

1.9. Tanım: Kompleks terimli bütün sınırlı dizilerin kümesine sınırlı dizler uzayı denir. ℓ_∞ ile gösterilir. Buna göre,

$$\ell_\infty = \{x = (x_i) : \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{C}, \ \sup_i |x_i| < \infty\}$$

veya

$$\ell_\infty = \{x = (x_i) : \forall i \in \mathbb{N}, |x_i| \le M, M > 0\}$$

dir.

Örnek (Sınırlı Diziler Uzayı Metriği): Her $x = (x_i), y = (y_i) \in \ell_\infty$ olmak üzere

$$d: \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(x,y)\to d(x,y)=\sup_i |x_i-y_i|$$

ile verilen d fonksiyonu ℓ_∞ üzerinde bir metriktir.

Çözüm: Her $x=(x_i), y=(y_i), z=(z_i)\in \ell_\infty$ için

(M1) $d(x,y)=\sup_i |x_i-y_i|=0$ olsun. Bu takdirde supremumun tanımından dolayı $|x_i-y_i|\le 0$ dır. Mutlak değer negatif olmayacağından için $|x_i-y_i|=0$ dır. Bu ise

$$x_i-y_i=0$$
$$x_i=y_i$$
$$x=y$$

olduğunu verir. Tersine olarak, $x=y$ olsun.

$$d(x,y)=d(x,x)=\sup_i |x_i-x_i|=0$$

bulunur.

(M2) $d(x,y)=\sup_i |x_i-y_i|=\sup_i |-(y_i-x_i)|=\sup_i |y_i-x_i|=d(y,x)$

(M3) Önce mutlak değerde üçgen eşitsizliğinden,

$$|x_i-y_i|=|x_i-z_i+z_i-y_i|\le |x_i-z_i|+|z_i-y_i|$$

yazılabilir. Bu iki ifadenin her iki yanının sup'u alınırsa ve her i için $\sup_i |x_i|<\infty$ olduğundan

$$\sup_i |x_i-y_i|\le \sup_i (|x_i-z_i|+|z_i-y_i|)\le \sup_i |x_i-z_i|+\sup_i |z_i-y_i|$$

bulunur. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$ dir. Buna göre (M1) (M2) ve (M3) aksiyomları sağlandığından d fonksiyonu bütün aksiyomları sağladığından ℓ_∞ üzerinde bir metriktir.

1.10. Tanım: $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\cdots,(X_n,d_n)$ metrik uzaylarının bir sonlu ailesi olsun. Eğer $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ ise bu kümelerin dik çarpımını gösterir.

Örnek: $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \cdots, (X_n, d_n)$ metrik uzaylarının bir sonlu ailesi ve $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ de bu kümelerin dik çarpımı olsun. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in X$ olmak üzere

$$d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ d(x,y) \leq \max_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i, y_i)\}$$

ile verilen d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

Çözüm: Her $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n), z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in X$ için

(M1) $d(x, y) = 0$ olsun. Her $1 \leq i \leq n$ için $d_i(x_i, y_i) = 0$ olduğundan $x_i = y_i$ olacağından $x = y$ elde edilir. Tersine olarak, $x = y$ ise $1 \leq i \leq n$ için $x_i = y_i$ olup $d_i(x_i, y_i) = 0$ dir. Bu takdirde $\max_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i, y_i)\} = 0$ olur ki bu bize $d(x, y) = 0$ olduğunu gösterir.

(M2) Her $1 \leq i \leq n$ için $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $d(x, y) = d(y, x)$ elde edilir.

(M3) j ve k birer doğal sayı $d(x, z) = d_j(x_j, z_j)$ ve $d(z, y) = d_k(z_k, y_k)$ olarak seçelim. Böylece her $1 \leq i \leq n$ için

$$d_i(x_i, z_i) \leq d_j(x_j, z_j) \text{ ve } d_i(z_i, y_i) \leq d_k(z_k, y_k)$$

bulunur. Bunun sonucu olarak da

$$\begin{aligned} d_i(x_i, y_i) &\leq d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i) \\ &\leq d_j(x_j, z_j) + d_k(z_k, y_k) \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafta tarafta maksimuma geçilirse

$$\max_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i, y_i)\} \leq \max_{1\leq i\leq n}\{d_j(x_j, z_j) + d_k(z_k, y_k)\}$$

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq \max_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i, y_i)\} \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n}\{d_j(x_j, z_j) + d_k(z_k, y_k)\} \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n}\{d_j(x_j, z_j)\} + \max_{1\leq i\leq n} d_k(z_k, y_k) \\ &\leq d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

olduğundan $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dir. Buna göre d fonksiyonu bütün aksiyomları sağlandığından X üzerinde bir metriktir.

ALT METRİK UZAY

1.11. Tanım: (X, d) bir metrik uzay, Y'de X'in bir alt kümesi ve Y'de d_1 d_1 metriği tanımlansın. Eğer her $x, y \in Y$ için $d_1(x, y) = d(x, y)$ oluyorsa, (Y, d_1) metrik uzayına (X, d) metrik uzayının alt metrik uzayı denir.

Örnek: $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

biçiminde tanımlarsak, $(\mathbb{R}^n, d)$ bir metrik uzaydır. Bunu yukarı da $\mathbb{R}^n$ de Euclid düzlemi metriğinde gösterilmiştir.

METRİK UZAY TOPOLOJİSİ

1.13. Teorem: Metrik fonksiyonları birer topolojidir. Yani; (X, d) bir metrik uzay ve X'in açık kümelerinin bir ailesi τ olsun.

i) $\varnothing, X \in \tau$

ii) τ-daki herhangi adetteki kümelerin birleşim yine τ-dadır.

ii) τ-daki sonlu adetteki açık kümelerin kesişimi yine τ-dadır.

İspat: i) Tanımdan dolayı $\varnothing \in \tau$ ve $X \in \tau$ olduğu açıktır.

ii) $U_i \in \tau$ olmak üzere $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ olsun.

$x \in U$ ise $\exists\, i \in \mathbb{R}$ için $x \in U_{i_0}$ dır. U_{i_0} açık olduğundan $B(x, r) \subset U_{i_0}$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı vardır. Buradan $B(x, r) \subset U_{i_0} \subseteq U$ ise $B(x, r) \subset U$ elde ederiz ki bu ise U'nun açık olduğunu gösterir. Buna göre $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \tau$ dır.

iii) $U_i \in \tau$ olmak üzere $V = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \in \tau$ olsun. $y \in V = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \in \tau$ ise $1 \leq i \leq n$ için $y \in U_i$ dir.

U_i ler açık olduğundan $B(x, r_i) \subset U$ olacak şekilde $r_i > 0$, $(1 \leq i \leq n)$ dir. Buna göre;

i=1 için $y \in U_1$ ise $\exists\, r_1 > 0 \ni B(x, r_1) \subset U_1$

i=2 için $y \in U_2$ ise $\exists\, r_2 > 0 \ni B(x, r_2) \subset U_2$

...

i=n için $y \in U_n$ ise $\exists\, r_n > 0 \ni B(x, r_n) \subset U_n$
bulunur. Burada $r = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ dersek

$$B(y,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} B(y,r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = V$$

$$B(y,r) \subset V$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı vardır. $V \in \tau$ dır.

Örnek: $d_1(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonların metrik olduğu okuyucuya bırakılmıştır. Bu iki metrik aynı topolojiyi oluşturur. Diğer bir ifadeyle d ve d_1 denk metriklerdir.

1.12. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde τ topolojisini oluşturan bir metrik bulunabiliyorsa, (X, τ) topolojik uzayına metrize edilebilir uzay denir.

Örnek:

1. Her X kümesi için $(X, \tau_{ayrık})$ topolojisi metrize edilebilir. Çünkü

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

metriği ayrık topolojiyi oluşturur ve bu fonksiyon her küme için metriktir.

2. Eğer X "En az 2 eleman içeren" bir küme ise $(X; \tau_{aşikar})$ topolojisi metrize edilemez. Bunun ispatını okuyucuya bırakıyoruz.

KÜMELER ARASINDAKİ UZAKLIK

1.13. Tanım: Bir (X, d) metrik uzayın a ve b'de X kümesinin boş olmayan iki altküme olsunlar. X'ler A'yı y'ler de B kümesini taradığında d(x, y) lerin meydana getirdiği kümenin en büyük alt sınırına A kümesinin B kümesine uzaklığı denir ve D(A, B) ile gösterilir. Şu halde

$$D(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

dir.

Örnek: $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6\}$ kümeleri ve $d(x,y) = |x - y|$ metriğine göre A ve B kümelerinin aralarındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm: $d(1,4) = 3, d(1,5) = 4, d(1,6) = 5, d(2,4) = 2,$
$d(2,5) = 3, d(2,6) = 3, d(3,4) = 1, d(3,5) = 2, d(3,6) = 3$

$D(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} = \inf\{1,2,3,4,5\} = 1$

1.14. Teorem: A ve B kümeleri üzerinde tanımlı D(A, B) uzaklık, x'in kuvvet kümesi üzerinde bir metrik tanımlamaz.

İspat: x'in kuvvet kümesi $P(x) = \{A, B : A, B \subset X\}$ olmak üzere A ve B'de $X = \mathbb{R}, d(x,y) = |x - y|, A = \{1,2\}, B = \{1,9,10\}$ seçelim. Bu takdirde
$d(1,1) = 0, d(1,9) = 8, d(1,10) = 9, d(2,1) = 1, d(2,9) = 7, d(2,10) = 8$
olur. Burada $\inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\inf\{d(1,1), d(1,9), d(1,10), d(2,1), d(2,9), d(2,10)\}\\&= \inf\{0,8,9,1,7\}\\&= 0\end{aligned}$$

bulunur. $D(A,B) = 0$ olmasına rağmen $A \neq B$ olduğundan (M2) aksiyomu sağlanmadığından D bir metrik olamaz.

Örnek: $A \cap B \neq \emptyset$ ise $D(A,B) = 0$ dır. Gösteriniz.

Çözüm: Kabul edelim ki $A \cap B = \{a\}$ olsun. Bu takdirde $d(a,a) = 0$ olur. a keyfi bir eleman olduğundan

$$D(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} = 0$$

bulunur.

Örnek: $\mathbb{R}$ kümesinde mutlak değer metriğine göre $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ya uzaklığı sıfırıdır.

1.14. Tanım: Bir x noktasından, (X,d) nin boş olmayan bir $B \subset X$ kümesine olan uzaklığı

$$D(x,B) = \inf\{d(x,b) : b \in B\}$$

biçimindedir.

Örnek: Herhangi $x, y \in X$ için

$$|D(x,B) - D(y,B)| \leq d(x,y)$$

olur.

Çözüm: $D(x,B) = \inf\{d(x,b) : b \in B\}$ olduğundan

$$D(x,B) \le d(x,b)$$

yazılabilir. d, x üzerinde bir metrik olduğundan her $x, y \in X$ için (M4) aksiyomundan

$$d(x,b) \le d(x,y) + d(y,b)$$

yazılabilir. Her $x \in X$ için her iki tarafın infumumunu alırsak,

$$\inf\{d(x,b) : b \in B\} \le \inf\{d(x,y) + d(y,b) : b \in B\}$$
$$\inf\{d(x,b) : b \in B\} \le d(x,y) + \inf\{d(y,b) : b \in B\}$$
$$D(x,B) \le d(x,y) + D(y,B)$$
$$D(x,B) - D(y,B) \le d(x,y) \qquad (1)$$

bulunur. Benzer şekilde her $b \in B, y \in X$ için

$$D(y,B) = \inf\{d(y,b) : b \in B\}$$

olduğundan d, X üzerinde bir metrik ve (M4) aksiyomundan

$$d(y,b) \le d(y,x) + d(x,b)$$

yazılabilir. $y \in X$ için her iki tarafın infumumunu alınırsa

$$\inf\{d(y,b) : b \in B\} \le \inf\{d(y,x) + d(x,b) : b \in B\}$$
$$\inf\{d(y,b) : b \in B\} \le d(y,x) + \inf\{d(x,b) : b \in B\}$$
$$D(y,B) \le d(y,x) + D(x,B)$$
$$-d(y,x) \le D(x,B) - D(y,B) \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitsizliklerinden

$$-d(y,x) \le D(x,B) - D(y,B)) \le d(x,y)$$
$$|D(x,B) - D(y,B)| \le d(x,y)$$

elde edilir.

BİR METRİĞİN ÇAPI

1.15. Tanım: (X,d) metrik uzay ve $\varnothing \neq A \subset X$ olsun.

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

olarak tarif edilen $\delta(A)$ sayısına A'nın çapı denir. Eğer $\delta(A) < \infty$ ise A'ya sınırlı küme adı verilir. Bu şu demektir: x, y noktaları A kümesini taradığında $d(x,y)$ ler $\mathbb{R}^+$ nın bir alt kümesini oluştururlar. Bu alt kümenin en büyük üst sınırına çapı verir.

Her $x, y \in A$ için $d(x,y) \le K$ olacak şekilde $K \ge 0$ sayısı vardır. Yani (x_n), X'de bir dizi ise bu dizinin terimlerinin kümesi X'in sınırlı bir alt kümesi ise (x_n) dizisine sınırlıdır. Demek ki (x_n) sınırlı ise her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x_n, x_m) \le K$ olacak şekilde $K \ge 0$ sayısı var demektir.

Örnek: $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6\}$ kümeleri ve $d(x,y) = |x - y|$ metriğine göre A ve B kümelerinin

a) A ve B Çapını

b) $A \cup B$ nin çapını
c) $A \cap B$ nin çapını
bulunuz.

Çözüm: a) $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6\}$
$\delta(A) = \sup\{d(x,y): x,y \in A\} = \sup\{0,1,2\} = 2$
$\delta(B) = \sup\{d(x,y): x,y \in B\} = \sup\{0,1,2\} = 2$

b) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
$\delta(A \cup B) = \sup\{d(x,y): x,y \in A \cup B\} = \sup\{0,1,2,3,4,5\} = 5$

c) $A \cap B = \emptyset$
$\delta(A \cap B) = \sup\{d(x,y): x,y \in A \cap B\} = \sup\{0\} = 0$

Örnek: Eğer $A \subset X$ sonlu bir alt kümesi ise A sınırlı ve $\delta(A) = \max\limits_{x,y \in A} d(x,y)$ olur.

Örnek: Her metrik uzay sınırlı yapılabilir. Gerçekten (X,d) bir metrik uzay her $x,y \in X$ için

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde her $x,y \in X$ için $d_1(x,y) < 1$ olduğundan (X,d_1) sınırlıdır.

1.15. Teorem: (X, d) metrik uzay $\emptyset \neq A,B \subset X$ ve $\delta(A) = \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y)$ olsun.

$$A \subset B \text{ ise } \delta(A) \leq \delta(B)$$

dir.

İspatı okuyucuya bırakılmıştır.

1.16. Teorem: $\delta(A) = 0$ olması için gerek ve yeter şart A'nın tek noktadan oluşmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $\delta(A) = 0$ olsun. Bu takdirde supireminim tanımından dolayı;

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) = 0$$

olduğundan her $x,y \in A$ için $d(x,y) \leq 0$ yazılabilir. (X, d) metrik uzay olduğundan $d(x,y) < 0$ olamayacağından $d(x,y) = 0$ dır. d bir metrik olduğundan her

$x, y \in A$ için $d(x, y) = 0$ ise $x = y$ elde ederiz ki bu bize $A = \{x\}$ yani A tek nokta kümesi olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$: $A = \{x\}$ olacak şekilde A tek nokta kümesi olsun. Bu takdirde $d(x, y) = 0$ olduğundan $\sup\{d(x, y) = 0 : x, y \in A\}$ olur. Bu ise $\delta(A) = 0$ dir.

1.1. Sonuç: Bir metrik uzayda bulunan A ve B gibi iki sınırlı kümenin, birleşimi de sınırlıdır.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. (X, d) bir metrik uzay olsun. k, pozitif bir reel bir sayı olmak üzere,
(a) $d_1(x, y) = k \cdot d(x, y)$
(b) $d_2(x, y) = \frac{d(x,y)}{k+d(x,y)}$
şeklinde tanımlanan fonksiyonların metrik olduklarını gösteriniz.

Çözüm: a) k, pozitif bir reel bir sayı olmak üzere,

(M1) (X, d) bir metrik uzay olduğundan

$$d_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow k \cdot d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

olur.

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ olduğundan

$$d_1(x, y) = k \cdot d(x, y) = k \cdot d(y, x) = d_1(y, x)$$

dir.

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ olduğundan

$$k \cdot d(x, y) \leq k \cdot d(x, z) + k \cdot d(z, y)$$
$$d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y)$$

olup (X, d_1) bir metrik uzaydır.

b) k, pozitif bir reel bir sayı olmak üzere,

(M1) (X, d) bir metrik uzay olduğundan

$$d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{k+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

olur.

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ olduğundan

$$d_2(x, y) = \frac{d(x,y)}{k+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{k+d(y,x)} = d_2(y, x)$$

dir.

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ olduğundan eşitsizliği dizi uzayı metriği (1) eşitsizliği gereği

$$\frac{d(x,y)}{k+d(x,y)} \leq \frac{d(x,y)}{k+d(x,y)} + \frac{d(x,y)}{k+d(x,y)}$$

$$d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$$

olur. Buna göre (X, d_2) bir metrik uzaydır.

2. (M3) özelliğinden yararlanarak tümevarımla

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})$$

olduğunu gösteriniz. (Bu eşitsizliğe genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği denir.)

Çözüm: Tümevarım yöntemi kullanalım. Her $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ için

i) $n = 3$ için $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ olup (M3) aksiyomu gereği önerme doğrudur.

ii) $n = k$ için verilen önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$d(x_1, x_k) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) \qquad (3)$$

dir. $k + 1$ için verilen önermenin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için (3) önermesinin her iki tarafta toplayalım.

$$d(x_1, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{k-1}, x_k) + d(x_k, x_{k+1})$$

bulunur. (M3) gereği

$$d(x_1, x_{k+1}) \leq d(x_1, x_k) + d(x_k, x_{k+1})$$

olacağından

$$d(x_1, x_{k+1}) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_k, x_{k+1})$$

elde edilir ki, bu bize önermenin doğru olduğunu gösterir.

3. Aşağıda $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ şeklinde verilen fonksiyonların $\mathbb{R}$ da birer metrik olup olmadıklarını belirleyiniz.

a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$

b) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

Çözüm: (M3) aksiyomunda $x = 7, y = 3$ ve $z = 4$ alalım.

$(x-y)^2 = (7-3)^2 = 16$

$(x-z)^2 = (7-4)^2 = 9$

$(y-z)^2 = (3-4)^2 = 1$

olduğundan

$$16 \nleq 9 + 1$$
$$d(x,y) \nleq d(x,z) + d(z,y)$$

bulunur ki, bu bize $\mathbb{R}$ da bir metrik olmadığını gösterir.

b) $d_2$nin metrik olduğu Minkowski eşitsizliği kullanılarak gösterilebilir. Okuyucuya bırakılmıştır.

4. (X, d) bir metrik uzay ve $\emptyset \neq A, B \subset X$ olsun.

$$d(A,B) = \inf\{d(A,B): a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

olarak tarif ediliyor. d'nin X'in kuvvet kümesi P(x) üzerinde metrik olmadığını gösteriniz.

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

5. Aşağıda $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere tanımlanan fonksiyonların $\mathbb{R}^2$ üzerinde birer metrik olduğunu gösteriniz.

(a) $d_1(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

(b) $d_2(x,y) = \begin{cases} 0, (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ 1, (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \end{cases}$

(c) $d_3(x,y) = |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

6. Aşağıda $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere tanımlanan fonksiyonların $\mathbb{R}^3$ üzerinde birer metrik olmadığını gösteriniz.

(a) $d_1(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|}$

(b) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

7. Aşağıda $x = (x_1, x_2, \cdots, x_3)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_3) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere tanımlanan fonksiyonların $\mathbb{R}^n$ üzerinde birer metrik olmadığını gösteriniz.

(a) $d_1(x,y) = \max\limits_{1 \le i \le n} \{|x_i - y_i|\}$

(b) $d_2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_1-y_1\right|$

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

8. Her $t \in [a,b]$, $x,y \in C[a,b]$ için

$d: C[a,b]\times C[a,b] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ d(x,y) = \int_a^b \left|x(t)-y(t)\right|dt$

ile tanımlanıyor, $(C[a,b], d)$ bir metriktir. Gösteriniz.

Çözüm: Bir $f \geq 0$ ise $\int_a^b f \geq 0$ ve $f \leq 0$ ise $\int_a^b f \leq 0$ olduğunu hatırlayalım. Buna göre;

$d(x,y) = 0$ ise $\int_a^b \left|x(t)-y(t)\right|dt = 0$

ise her $t \in [a,b]$, $x,y \in C[a,b]$ için

$|x(t) - y(t)| = 0$
$x(t) - y(t) = 0$
$x(t) = y(t)$
$x = y$

dir.

(M2) Her $t \in [a,b]$, $x,y \in C[a,b]$ için

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \int_a^b \left|x(t)-y(t)\right|dt \\ &= \int_a^b \left|-(y(t)-x(t))\right|dt \\ &= \int_a^b \left|y(t)-x(t)\right|dt \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$

olur.

(M3) Her $t \in [a,b]$, $x,y \in C[a,b]$ için

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \int_a^b \left|x(t)-y(t)\right|dt \\ &= \int_a^b \left|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)\right|dt \end{aligned}$$

$$\leq \int_a^b |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)| dt$$

$$= \int_a^b |x(t)-z(t)| dt + \int_a^b |z(t)-y(t)| dt$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

elde edilir ki bu bize $(C[a,b], d)$ bir metrik olduğunu gösterir.

9. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ olsun. $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere,

(a) $d_1(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

(b) $d_2(z_1, z_2) = \begin{cases} |z_1| + |z_2|, & z_1 \neq z_2 \\ 0, & z_1 = z_2 \end{cases}$

(c) $d_3(z_1, z_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

(d) $d_4(z_1, z_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

biçiminde tanımlanan fonksiyonların bir metrik olduğunu gösteriniz.

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

10. $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ birer metrik uzaylar ve $X = X_1 \times X_2$ olsun. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ olmak üzere,

(a) $d_1(x, y) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$

(b) $d_2(x, y) = \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + d(x_2, y_2)^2}$

(c) $d_3(x, y) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$

ile tanımlanan fonksiyonlar X üzerinde bir metriktir. Gösteriniz.

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

11. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere

(a) $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $d_1(x, y) = (d(x, y))^n$

(b) $0 < r < 1$ olmak üzere $d_2(x, y) = (d(x, y))^r$

(c) $d_3(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$

şeklinde tanımlanan fonksiyonların metrik olduklarını gösteriniz.

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

12. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere

$|d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t)$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x, y, z, t \in X$ için d bir metrik olduğundan

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,t) + d(y,t)$$

$$d(x,y) - d(z,t) \leq d(x,z) + d(y,t) \qquad (1)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$d(z,t) \leq d(z,x) + d(x,y) + d(y,t)$$

$$d(z,t) \leq d(x,z) + d(x,y) + d(y,t)$$

$$-[d(x,z) + d(y,t) \leq d(x,y) - d(z,t)$$

$$-[d(x,z) + d(y,t)] \leq d(x,y) - d(z,t) \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitsizliğinden,

$$-[d(x,z) + d(y,t)] \leq d(x,y) - d(z,t) \leq d(x,z) + d(y,t)$$

$$|d(x,y) - d(z,t)| \leq d(x,z) + d(y,t)$$

olur.

13. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere

(a) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

(b) $|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(y,v)$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) Her $x, y, z \in X$ için d bir metrik olduğundan

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$$

$$d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y) \qquad (1)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$$

$$d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z)$$

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z) \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitsizliğinden,

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$$

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

olur.

b) Benzer şekilde yapılacağından okuyucuya bırakılmıştır.

14. (X, d) bir metrik uzay olsun. $d_1(x,y) = k + d(x,y)$ şeklinde tanımlansın. d_1 in bir metrik olması için k ne olmalıdır?

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

15. (Hamming Uzaklığı) Sıfır ve birlerden oluşan tüm sıralı üçlülerin cümlesini X olsun. X üzerinde bir d metriği,

$d(x, y) =$ "x ve y'nin farklı bileşenlere sahip olduğu yerlerin sayısı"

ile tanımlansın. Bu d fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğunu gösteriniz.

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

16. $\mu_i > 0$ olmak üzere, $\sum \mu_i$ yakınsak olsun. Her $x = (x_i), y = (y_i) \in s$ için

$$d: s \times s \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{\mu_i [1 + |x_i - y_i|]}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu s üzerinde bir metriktir. Gösteriniz.

Bu sorunun çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI, Maltepe Üniversitesi, Foksiyonel Analiz Ders Notları, İstanbul, 2013.

2. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Fonksiyonel Analiz, 5. Baskı, Koza Yayıncılık, Ankara, 2017.

3. Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI, Genel Topoloji, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 73, Samsun, 1993.

4. Prof. Dr. Öner ÇAKAR, Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi, Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 5. Baskı, No: 13, Ankara, 2007.