2. BÖLÜM
METRİK UZAYLARDA KÜMELERİN ANALİZİ

Topoloji kavramının oluşmasına yol açan en önemli kavram olması açısından metrik kavramı çok önem taşımaktadır. Bu sebepten burada metrik kavramının temel özelliklerini inceleyeceğiz.

METRİK UZALARDA YUVAR KAVRAMI

2.1. Tanım: (X, d) bir metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayısı verilmiş olsun. Bu takdirde

a) $B(x_0, r) = \{x : d(x, x_0) < r, x \in X\}$ kümesine x_0 - merkezli r - yarıçaplı açık yuvar denir.

b) $B[x_0, r] = \{x : d(x, x_0) \leq r, x \in X\}$ kümesine x_0 - merkezli r - yarıçaplı kapalı yuvar denir.

c) $S(x_0, r) = \{x : d(x, x_0) = r, x \in X\}$ kümesine de x_0 - merkezli r - yarıçaplı yuvar yüzeyi denir. Dikkat edilirse yuvar yüzeyi

$$S(x_0, r) = B[x_0, r] - B(x_0, r)$$

olduğu görülür.

Örnek: $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $d(x, y) = |x - y|$ metriğini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x : d(x, x_0) < r, x \in X\} \\ &= \{x : |x - x_0| < r, x \in X\} \\ &= (x_0 - r, x_0 + r) \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

açık kümesi r yarıçaplı açık yuvar,

$$\begin{aligned} B[x_0, r] &= \{x : d(x, x_0) \leq r, x \in X\} \\ &= \{x : |x - x_0| \leq r, x \in X\} \\ &= [x_0 - r, x_0 + r] \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

kapalı kümesi r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x : d(x, x_0) = r, x \in X\}$$

$$= \{x : |x - x_0| = r, x \in X\}$$
$$= (x_0 - r, x_0 + r) \subset \mathbb{R}$$

noktaların kümesi r yarıçaplı kapalı yüzeyidir.

Burada;

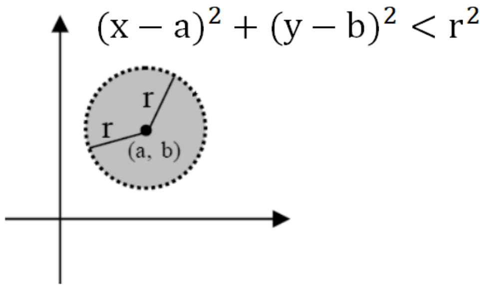
$$S(x_0, r) = B[x_0, r] - B(x_0, r)$$

olduğu açıktır.

Örnek: $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ metriğine göre $\mathbb{R}^2$ de $B((0,0), r)$ açık yuvarı;

$$d((x, y), (a,\ b)) = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} < r$$

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 < r^2$$

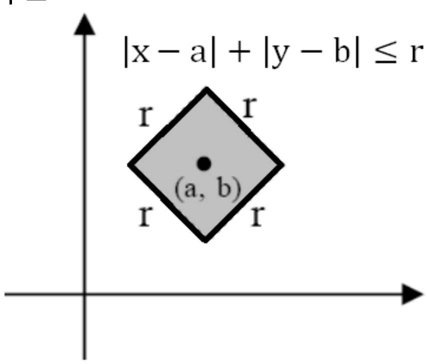


biçimindedir.

Örnek: $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ metriğine göre $\mathbb{R}^2$ de $B((a, b), r)$ kapalı yuvarı;

$$d((x_1, y_1), (a, b)) = |x_1 - a| + |y_1 - b| \leq r$$

$$|x_1 - a| + |y_1 - b| \leq r$$

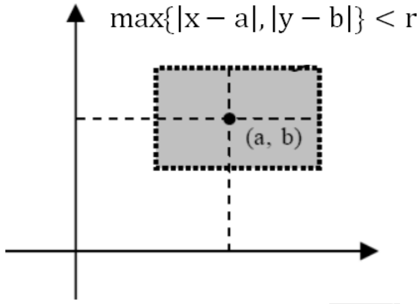


biçimindedir.

Örnek: $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ metriğine göre $\mathbb{R}^2$ de $B((0,0),r)$ açık yuvarı;

$$d((x_1,y_1),(0,0)) = \max\{|x_1 - a|, |y_1 - b|\} < r$$

$$\max\{|x_1 - a|, |y_1 - b|\} < r$$



biçimindedir.

Örnek: $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ de $B(x_0, 1)$ açık yuvarını belirleyiniz.

Çözüm: $x, y \in \mathbb{C}$ olmak üzere

a) $d(x,y) = |x - y|$ metriğine göre

$$\begin{aligned} B(x_0,1) &= \{x \in \mathbb{C} : d(x,x_0) < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{C} : -1 < x - x_0 < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{C} : x_0 - 1 < x < x_0 + 1\} \\ &= (x_0 - 1, x_0 + 1) \end{aligned}$$

b) $d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ metriğine göre

$$\begin{aligned} B(x_0,1) &= \{x \in \mathbb{C} : d(x,x_0) < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{C} : x^2 + {x_0}^2 < 1\} \end{aligned}$$

kümesi x_0 merkezli 1 yarıçaplı açık küredir.

2.2. Tanım (Sınır Noktası): Bir $A \subset (X,d)$ kümesiyle, X'in (A'ya ait olabilen ya da olmayan) bir x noktasını göz önüne alalım. Eğer, x'in her komşuluğu, A'ya ait olmayan noktaların yanı sıra, A'ya ait noktaları da içeriyorsa, x'e

A kümesinin bir sınır noktası adı verilir. A'nın tüm sınır noktalarının oluşturduğu küme ise, A'nın sınırı adını alır.

Örnek: $\mathbb{R}$ de $(-1, 1]$ aralığının sınır noktaları $\{-1\}$ ve $\{1\}$ dir.

2.1. Sonuç: Eğer $A \subset X$ sınırlı ise, $x_0 \in X$ herhangi bir nokta ve r'de yeterince büyük reel bir sayı olmak üzere $A \subset B(x_0, r)$ dir ve bunun tersi de doğrudur.

2.2. Tanım (Komşuluk): (X, d) bir metrik uzay $A \subset X$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer $B(x_0, r) \subset A$ olacak şekilde bir pozitif r reel sayısı bulunabiliyorsa A kümesine a noktasının bir komşuluğu denir. Buna göre x_0'ın bir ε - civarını içeren X'in herhangi bir alt kümesine x_0'ın komşuluğudur (civarıdır).

Tanımdan her $B(x_0, r)$ açık yuvarı x_0 noktasının komşuluğu olacaktır. Hatta $B[x_0, r]$ kapalı yuvarı da x_0 noktasının bir komşuluğu olacaktır. X uzayının kendisi de içerdiği her noktanın komşuluğu olacaktır. Bir noktanın iki komşuluğunun kesişimi ve hatta bir noktanın sonlu adetteki komşuluklarının kesişimi yine o noktanın komşuluğu olacaktır. Bir noktanın iki komşuluğunun birleşimi ve hatta bir noktanın herhangi adetteki komşuluklarının birleşimi yine o noktanın komşuluğu olacaktır.

2.2. Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. A, x_0'ın bir komşuluğu ise x_0'a A'nın iç noktası denir. A'nın bütün iç noktalarının kümesine A'nın içi denir ve A^0 veya iç A şeklinde gösterilir. Dolayısıyla $A^0 \subset A$ dır ve A^0 bir önceki teoremin 2 özelliğinden dolayı A'da içeren en büyük açıktır. Özel olarak A açık ise $A^0 = A$ dır.

Örnek:
$[-1, 5]^0 = (-1, 5), (2, 4]^0 = (2, 4), \varnothing^0 = \varnothing, \mathbb{N}^0 = \varnothing, \mathbb{Z}^0 = \varnothing, \mathbb{R}^0 = \mathbb{R}$

Örnek: $(d, C[a,b])$ metrik uzayında $A = \left\{ f \in [a,b] : \left| \int_0^1 f(t)dt \right| < 1 \right\}$ kümesi açık bir kümedir. Gerçekten $g \in A$ için $\left| \int_0^1 g(t)dt \right| = k < 1$ olduğunda, eğer $r = 1 - k$ olarak alınırsa, olur. $B(g,r) \subset A$ olur. $f \in B(g,r)$ olsun.

$$\left| \int_0^1 f(t)dt \right| \le \left| \int_0^1 (f(t) - g(t))dt \right| + \left| \int_0^1 g(t)dt \right| < 1 - k + k = 1$$

olduğundan $f \in A$ bulunur. O halde istenen elde edilir.

Kümelerin açık veya kapalı oluşları tanımlanma durumuna göre değişmektedir. Bir uzaya göre açık olan küme, başka uzaya göre açık olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{R}^2$ düzlemini ve $(0,1)$ açık aralığını düşünelim. $(0,1)$ aralığındaki merkezli ε yarıçaplı yuvar bu aralığa ait olmayan noktaları da kapsamaktadır. Bu nedenle $(0,1)$ aralığı da açık değildir. Ancak $(0,1)$, $\mathbb{R}$ de açık bir kümedir.

Örnek: $x \in \mathbb{R}$ için $\{x\}^0 = \varnothing$ dir. Çünkü $\{x\}$ açık değildir.

2.2. Sonuç: A^0 metrik uzayında A'nın en büyük alt kümesidir.

AÇIK KÜME ve KAPALI KÜME

2.3. Tanım: (X, d) bir metrik uzay $A \subset X$ olsun.

a) Herhangi sayıda açık yuvarların birleşmesinden oluşan kümeye açık küme denir. Açık küme sayısı herhangi sayıdadır. Yani bir tane yuvardan da oluşabilir, sonlu sayıda açık yuvardan da oluşabilir, sonsuz sayıda açık yuvardan da oluşabilir.

b) $B \subset X$ olsun. Eğer $B^t = X - B$, X'de açık ise B ye kapalı küme denir. Herhangi sayıda kapalı yuvarların birleşmesinden oluşan küme bir kapalı kümedir.

Bu tanımlardan X'in herhangi bir alt kümesinin açık veya kapalı olacağı sonucu çıkartılmamalıdır. Öyle kümeler vardır ki ne açık ne de kapalıdır. Örneğin; $\mathbb{R}$'de $d(x,y) = |x - y|$ metriğine göre $A = (a,b] \subset \mathbb{R}$ kümesi böyle bir kümedir. $A = (a, b]$ açık değildir. Çünkü $B(y, r) = \{x : d(x, r) < r, x \in X\}$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı yoktur. Aynı zamanda kapalıda değildir. Çünkü

$$A^t = \mathbb{R} - A = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$$

elde edilir ki bu küme açık değildir. Ayrıca $B(y, r) = \{x : d(x, r) < r, x \in X\}$ olduğundan açık küme (kapalı küme) kavramı d metriğine bağlıdır. Bu sebeple bir kümenin açıklığı veya kapalılığı o uzay üzerinde tarif edilen metriğe göre değişebilir.

Örnek: d, $\mathbb{R}$ de mutlak değer metriği olmak üzere $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayını düşünelim. (0,1) açık aralığı açık bir kümedir. Gerçekten,

$$x \in (0, 1) \text{ ve } \varepsilon = \{|1 - x|, |x|\}$$

ise $B(x, \varepsilon) \subset (0,1)$ dır. Daha genel olarak $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere (a, b) açık aralımı açık bir kümedir.

Ayrıca $\mathbb{R}$ nin kendisi de açık bir kümedir. çünkü her $x \in \mathbb{R}$ için $B(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ dır.

Örnek: $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi kapalıdır. Gerçekten, $y \in X\backslash\{x\}$ ise $x \neq y$ tir. O halde $d(x, y) > 0$ olur. Eğer $r = d(x, y)$ olarak alırsak, $B(y, r) \subset X\backslash\{x\}$ dir. $z \in B(y, r)$ ise $d(y, r) > 0$ dir. Buradan,

$$0 < d(x, y) - d(y, z) \leq |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

olup $x \neq z$ dir. O halde, $z \in X\backslash\{x\}$ bulunur.

Örnek: (X, d) diskre bir metrik uzay ise X'in her altkümesi X'de açıktır, çünkü $M \subset X$ ve $x \in M$ ise ε, $0 < \varepsilon < 1$ şartını sağlayacak şekilde seçilirse $B(x, \varepsilon) \subset M$ olur. Diskre metriğine göre $\{0\}$, $\mathbb{R}$'de açıktır. Fakat mutlak değer metrisine göre $\{0\}$, $\mathbb{R}$ de açık değildir. Bu sebeple (X, d) bir metrik uzay ve M, X'de açıksa M'ye d-açık demek daha yerinde bir ifade olur.

2.2. Sonuç: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde her $B(x, r)$ açık yuvarı bir açık küme, her $B[x, r]$ kapalı yuvarı bir kapalı kümedir.

2.1. Teorem: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

i) X ve $\emptyset$ açık kümelerdir.

ii) X'in sonlu sayıda alt kümesinin kesişimi yine açık bir kümedir.

iii) X'in herhangi sayıda açık alt kümelerinin birleşimi yine açık bir kümedir.

İspat: i) Her $x \in X$ için $B(x,1) \subset X$ yazılabileceğinden X kümesi açıktır. Boş ($\varnothing$)kümenin açık küme olduğunu göstermek için $\varnothing$ in açık olmadığını varsayalım. Bu takdirde öyle bir $x \in \varnothing$ vardır ki $\varnothing$ kümenin hiç elemanı olmayacağı gerçeğine aykırı bir durum çıkar ki bu ise çelişkidir. O halde $\varnothing$ küme açık kümedir.

ii) $U_i \in \tau$ olmak üzere $V = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ olsun. $y \in V = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ ise $1 \leq i \leq n$ için $y \in U_i$ dir. U_i ler açık olduğundan $B(x, r_i) \subset U$ olacak şekilde $r_i > 0$, $(1 \leq i \leq n)$ dir. Buna göre;

$i=1$ için $y \in U_1$ ise $\exists\, r_1 > 0 \ni B(x, r_1) \subset U_1$
$i=2$ için $y \in U_2$ ise $\exists\, r_2 > 0 \ni B(x, r_2) \subset U_2$
…
$i=n$ için $y \in U_n$ ise $\exists\, r_n > 0 \ni B(x, r_n) \subset U_n$

bulunur. Burada $r = \min\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ dersek

$$B(y,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} B(y,r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = V$$

$$B(y,r) \subset V$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı vardır. Bu ise $V = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ nin açık bir küme olması demektir.

iii) $U_i \in \tau$ olmak üzere $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ olsun.

$x \in U$ ise $\exists\, i \in \mathbb{R}$ için $x \in U_{i_0}$ dır. U_{i_0} açık olduğundan $B(x,r) \subset U_{i_0}$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı vardır. Buradan $B(x,r) \subset U_{i_0} \subseteq U$ ise $B(x,r) \subset U$ elde ederiz ki bu ise U'nun açık olduğunu gösterir. Buna göre $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \in \tau$ açık kümedir.

2.1. Not: 2.1. teoremden dolayı her metrik uzay bir topolojik uzaydır.

2.2. Teorem: (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde, X'in bir alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart her noktasının komşuluğu olmasıdır.

İspat bir önceki teoremin ispatına benzer olarak yapılabileceğinden alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

2.3. Teorem: (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

i) X ve $\varnothing$ kapalı kümelerdir.

ii) X'in herhangi sayıda kapalı alt kümelerinin kesişimi yine kapalı bir kümedir.

iii) X'in sonlu sayıda kapalı alt kümesinin birleşimi yine kapalı bir kümedir.

İspat: i) $X^t = \varnothing$ ve $\varnothing$ açık olduğundan X kapalıdır, $\varnothing^t = X$ ve X açık olduğundan $\varnothing$ kapalıdır.

ii) X'in kapalı alt kümelerinin herhangi bir sınıfı $\{K_i : i \in I\}$ olsun. $\left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)^t = \bigcup_{i\in I} K_i^t$ 1olduğundan, K_i lerin her biri kapalı olduğundan tümleyenleri açık olacağından, her bir $i \in I$ için K_i^t kümesi açık olacak ve dolayısıyla açıkların herhangi bir birleşimi olarak $\bigcup_{i\in I} K_i^t$ 2kümesi açık ve dolayısıyla tümleyeni açık olan $\bigcap_{i\in I} K_i$ 3kümesi kapalı olacaktır.

iii) $U_i \in \tau$ olmak üzere $U = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ olsun. $\left(\bigcup_{i\in I} K_i\right)^t = \bigcap_{i\in I} K_i^t$ olup, K_i lerin kapalı olduklarından, tünmeyenleri açık olacak ve dolayısıyla açık iki kümenin arakesiti olan $\left(\bigcup_{i\in I} K_i\right)^t$ kümesi açık olacaktır. Tümleyeni açık olduğundan, $\bigcap_{i\in I} K_i^t$ kümesi kapalı olacaktır.

2.4. Teorem: Bir metrik uzaydaki sonlu her alt küme kapalıdır.

İspat: (X, d) metrik uzay ve $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subseteq X$ olsun. $A = X \backslash (X \backslash A)$ olduğundan $X \backslash A$ nın açık olduğunu gösterebilirsek ispat tamamlanmış olur. $y \in X \backslash A$ olsun. Biz $p_1 = d(y_1, x_1), p_2 = d(y_1, x_2), \cdots, p_n = d(y_1, x_n)$ diyelim. Şimdi $p = \min\{p_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$ olsun. Burada dikkat edilirse, $B(y, p) \subseteq X \backslash A$ dır. Gerçekten, $z \in B(y, p)$ ise $d(y, z) < p$ olduğundan $i = 1, 2, \cdots, n$ için $z \neq x_i$ olur. O halde $z \in X \backslash A$ bulunur.

KÜMELER ARASINDAKİ UZAKLIK

2.4. Tanım: Bir (X, d) metrik uzayın a ve b'de X kümesinin boş olmayan iki altküme olsunlar. X'ler A'yı y'ler de B kümesini taradığında d(x, y) lerin meydana getirdiği kümenin en büyük alt sınırına A kümesinin B kümesine uzaklığı denir ve D(A, B) ile gösterilir. Şu halde

$$D(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

dir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ kümeleri ve $d(x, y) = |x - y|$ metriğine göre A ve B kümelerinin aralarındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm: $d(1,4) = 3, d(1, 5) = 4, d(1, 6) = 5, d(2, 4) = 2,$
$d(2, 5) = 3, d(2, 6) = 3, d(3, 4) = 1, d(3, 5) = 2, d(3, 6) = 3$

$$D(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} = \inf\{1, 2, 3, 4, 5\} = 1$$

2.5. Teorem: A ve B kümeleri üzerinde tanımlı D(A, B) uzaklık, x'in kuvvet kümesi üzerinde bir metrik tanımlamaz.

İspat: x'in kuvvet kümesi $P(x) = \{A, B : A, B \subset X\}$ olmak üzere A ve B'de $X = \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|, A = \{1, 2\}, B = \{1, 9, 10\}$ seçelim. Bu takdirde

$$d(1,1) = 0, d(1, 9) = 8, d(1, 10) = 9, d(2, 1) = 1, d(2, 9) = 7, d(2, 10) = 8$$

olur. Burada $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\inf\{d(1,1), d(1, 9), d(1, 10), d(2, 1), d(2, 9), d(2, 10)\} \\ &= \inf\{0, 8, 9, 1, 7\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $D(A, B) = 0$ olmasına rağmen $A \neq B$ olduğundan (M2) aksiyomu sağlanmadığından D bir metrik olamaz.

Örnek: $A \cap B \neq \emptyset$ ise $D(A, B) = 0$ dır. Gösteriniz.

Çözüm: Kabul edelim ki $A \cap B = \{a\}$ olsun. Bu takdirde $d(a,a) = 0$ olur. a keyfi bir eleman olduğundan

$$D(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} = 0$$

bulunur.

Örnek:

$$A = \{(x,y): x^2 + (y-1)^2 = 1\} \text{ ve } B = \{(x,y): (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

ise $D(A,B) = 0$ dır.

Örnek: $\mathbb{R}$ kümesinde mutlak değer metriğine göre $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{I} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ya uzaklığı sıfırıdır.

2.5. Tanım: Bir x noktasından, (X,d) nin boş olmayan bir $B \subset X$ kümesine olan uzaklığı

$$D(x,B) = \inf\{d(x,b) : b \in B\}$$

biçimindedir.

Örnek: Herhangi $x, y \in X$ için

$$|D(x,B) - D(y,B)| \leq d(x,y)$$

olur.

Çözüm: $D(x,B) = \inf\{d(x,b) : b \in B\}$ olduğundan

$$D(x,B) \leq d(x,b)$$

yazılabilir. d, x üzerinde bir metrik olduğundan her $x, y \in X$ için (M4) aksiyomundan

$$d(x,b) \leq d(x,y) + d(y,b)$$

yazılabilir. Her $x \in X$ için her iki tarafın infumumunu alırsak,

$$\inf\{d(x,b) : b \in B\} \leq \inf\{d(x,y) + d(y,b) : b \in B\}$$
$$\inf\{d(x,b) : b \in B\} \leq d(x,y) + \inf\{d(y,b) : b \in B\}$$
$$D(x,B) \leq d(x,y) + D(y,B)$$
$$D(x,B) - D(y,B) \leq d(x,y) \qquad (1)$$

bulunur. Benzer şekilde her $b \in B, y \in X$ için

$$D(y,B) = \inf\{d(y,b) : b \in B\}$$

olduğundan d, X üzerinde bir metrik ve (M4) aksiyomundan

$$d(y,b) \leq d(y,x) + d(x,b)$$

yazılabilir. $y \in X$ için her iki tarafın infumumunu alınırsa

$$\inf\{d(y,b) : b \in B\} \leq \inf\{d(y,x) + d(x,b) : b \in B\}$$
$$\inf\{d(y,b) : b \in B\} \leq d(y,x) + \inf\{d(x,b) : b \in B\}$$
$$D(y,B) \leq d(y,x) + D(x,B)$$

$$-d(y,x) \leq D(x,B) - D(y,B) \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitsizliklerinden

$$-d(y,x) \leq D(x,B) - D(y,B)) \leq d(x,y)$$

$$|D(x,B) - D(y,B)| \leq d(x,y)$$

elde edilir.

BİR METRİĞİN ÇAPI

2.6. Tanım: (X, d) metrik uzay ve $\emptyset \neq A \subset X$ olsun.

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

olarak tarif edilen $\delta(A)$ sayısına A'nın çapı denir. Eğer $\delta(A) < \infty$ ise A'ya sınırlı küme adı verilir. Bu şu demektir: x, y noktaları A kümesini taradığında $d(x,y)$ ler $\mathbb{R}^+$ nın bir alt kümesini oluştururlar. Bu alt kümenin en büyük üst sınırına çapı verir.

Her $x, y \in A$ için $d(x,y) \leq K$ olacak şekilde $K \geq 0$ sayısı vardır. Yani (x_n), X'de bir dizi ise bu dizinin terimlerinin kümesi X'in sınırlı bir alt kümesi ise (x_n) dizisine sınırlıdır. Demek ki (x_n) sınırlı ise her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x_n, x_m) \leq K$ olacak şekilde $K \geq 0$ sayısı var demektir.

Örnek: $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6\}$ kümeleri ve $d(x,y) = |x - y|$ metriğine göre A ve B kümelerinin

a) A ve B Çapını

b) $A \cup B$ nin çapını

c) $A \cap B$ nin çapını

bulunuz.

Çözüm: a) $A = \{1,2,3\}, B = \{4,5,6\}$

$\delta(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\} = \sup\{0,1,2\} = 2$

$\delta(B) = \sup\{d(x,y) : x, y \in B\} = \sup\{0,1,2\} = 2$

b) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\delta(A \cup B) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A \cup B\} = \sup\{0,1,2,3,4,5\} = 5$

c) $A \cap B = \emptyset$

$\delta(A \cap B) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A \cap B\} = \sup\{0\} = 0$

Örnek: Eğer $A \subset X$ sonlu bir alt kümesi ise A sınırlı ve $\delta(A) = \max\limits_{x,y \in A} d(x,y)$ olur.

Örnek: Her metrik uzay sınırlı yapılabilir. Gerçekten (X, d) bir metrik uzay her $x, y \in X$ için

$$d_1(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde her $x, y \in X$ için $d_1(x, y) < 1$ olduğundan (X, d_1) sınırlıdır.

2.6. Teorem: (X, d) metrik uzay $\emptyset \neq A, B \subset X$ ve $\delta(A) = \sup\limits_{x,y \in A} d(x, y)$ olsun.

$$A \subset B \text{ ise } \delta(A) \leq \delta(B)$$

dir.

İspatı okuyucuya bırakılmıştır.

2.7. Teorem: $\delta(A) = 0$ olması için gerek ve yeter şart A'nın tek noktadan oluşmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $\delta(A) = 0$ olsun. Bu takdirde supireminim tanımından dolayı;

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y) = 0$$

olduğundan her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq 0$ yazılabilir. (X, d) metrik uzay olduğundan $d(x, y) < 0$ olamayacağından $d(x, y) = 0$ dır. d bir metrik olduğundan her $x, y \in A$ için $d(x, y) = 0$ ise $x = y$ elde ederiz ki bu bize $A = \{x\}$ yani A tek nokta kümesi olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$: $A = \{x\}$ olacak şekilde A tek nokta kümesi olsun. Bu takdirde $d(x, y) = 0$ olduğundan $\sup\{d(x, y) = 0 : x, y \in A\}$ olur. Bu ise $\delta(A) = 0$ dir.

2.3. Sonuç: Bir metrik uzayda bulunan A ve B gibi iki sınırlı kümenin, birleşimi de sınırlıdır.

METRİK UZAYDA YIĞILMA NOKTASI ve KAPANIŞ

2.6.Tanım (Yığılma –Limit– Noktası): (X, d) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x_0 \in X$ için $B(x_0, \varepsilon)$ açık yuvarı A'nın x_0'dan farklı en az bir elemanını içeriyorsa x_0'a A'nın yığılma (limit) noktası denir. Yani, her $\varepsilon > 0$ için

$$B(x_0, \varepsilon) \cap \{A - \{x_0\}\} \neq \emptyset$$

ise x_0'a A'nın yığılma noktasıdır. A'nın yığılma noktalarının kümesini A^* ile gösterelim.

2.7. Tanım (Kapanış): (X, d) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \cup A^* = \overline{A}$ kümesine A'nın kapanışı denir. Şu halde A'nın kapanışı $(\overline{A})$, A'yı içeren en küçük kapalı kümedir. Yani

$$\overline{A} = \cap \{F \subseteq X : F \text{ kapalı ve } A \subseteq F\}$$

dir.

Örnek: $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ kümesinin kapanışı $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$
$B = [0, 1] \cup \{2\}$ kümesinin kapanışı $\overline{B} = [0, 1] \cup \{2\}$

Örnek: $\mathbb{R}$ de a ve b, hem (a, b) nin hem de $[a, b]$ nin bir limit noktasıdır. Görüldüğü gibi bu limit noktası kümeye ait alabileceği gibi olmayabilir de.

Örnek: $A = \{0\} \cup (1, 2) \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu taktirde 0, A'nın limit noktası değildir. Mesela $B(0, 1)$, A'nın 0'dan başka noktasını içermez. A'nın $\mathbb{R}$ deki limit noktalarının kümesi $[1, 2]$ dir.

Örnek: $\mathbb{R}$ nin herhangi bir x noktası $\mathbb{Q}$ nun bir limit noktasıdır. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ da bir rasyonel sayı vardı. $\mathbb{R}$ deki limit noktalarının kümesi $\mathbb{R}$ dir.

Örnek: $(a, b), (a, b], [a, b)$ veya $[a, b]$ nın $\mathbb{R}$ de kapanışları $[a, b]$ dır. $\{0\} \cup (1, 2)$ nin $\mathbb{R}$ de deki kapanışı ise $\{0\} \cup [1, 2]$ dir.

Örnek: Bazı metrik uzaylarda açık bir yuvarın kapanışı kapalı bir yuvardır. Mesela $\mathbb{R}^3$ de $\overline{B(x_0, r)} = \overline{B}(x_0, r)$ dır. Fakat hemen belirtelim ki bu husus herhangi bir metrik uzay için doğru delildir.

Örnek: $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$ ise A'nın yığılma noktası 0'dır. $A \cup A^* = \overline{A}$

2.2. Not: Bir kümenin yığılma noktaları ile bir dizinin limiti birbirinden farklıdır.

2.8. Teorem: A'nın kapalı olması için $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ olmasıdır.

İspat: İlk olarak, A kapalı olsun. $\bar{A}$ tanımından $A \subseteq \bar{A}$ kapsaması açıktır. Ayrıca A kapalı $A \subseteq A$ ve olduğundan $\bar{A}$'nın tanımından $\bar{A} \subseteq A$ bulunur.

Tersine, $A = \bar{A}$ olsun. $\bar{A}$ kapalı olduğundan da kapalı olur.

2.9. Teorem (Kapanış Teoremi): A, bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan bir altkümesi ve A bu kümenin kapanışı olsun. $x \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart, A'de, $x_n \to x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisinin var olmasıdır.

İspat: a) $x \in \bar{A}$ olsun. $x_n \in A$ ise, bu tip bir dizi, $(x, x, \cdots)$ dizisidir. $x \notin A$ ise, x, A'nın bir yığılma noktasıdır. O halde, her bir n için, $B = \left(x, \frac{1}{n}\right)$ yuvarı, bir $x_n \in A$ elemanı içerir ve $n \to \infty$ için, $\frac{1}{n} \to 0$ olduğundan, $x_n \to x$ olur.

Tersine olarak, (x_n), A'de ve $x_n \to x$ ise, ya $x \in A$ olur ya da x'in her komşuluğu $x_n \neq x$ noktaları içerir. Dolayısıyla x, A'nın bir yığılma noktasıdır. Buna göre kapanışın tanımı gereği $x \in \bar{A}$ yazılır.

2.10. Teorem (Kapalı Küme Teoremi): A, bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan bir altkümesi ve A bu kümenin kapanışı olsun. A'nın kapalı olması için gerek ve yeter şart $x_n \in A$ ve $x_n \to x$ ise, $x \in A$ olmasıdır. Yani A'nın tüm yığılma noktalarını kapsamasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: A kapalı olsun. $\bar{A} \subseteq A$ olduğunu göstermeliyiz. Tersini varsayalım ve $x \in A$ noktası için $x \in \bar{A}$ ama $x \notin A$ olsun. $X \setminus A$ açık ve $x \in X \setminus A$ dır. Ancak $(X \setminus A) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$ olduğundan $x \notin \bar{A}$ elde edilir. Bu ise varsayımımızla çelişir.

$\Leftarrow$: $\bar{A} \subseteq A$ olsun. Biz $X \setminus A$ nın açık olduğunu gösterirsek işimiz biter. $x \in X \setminus A$ olsun. $x \notin A$ ve buradan $x \notin \bar{A}$ bulunur. O halde $B(x, r) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset$ olacak şekilde $\exists\, r > 0$ vardır. Buradan $B(x, r) \subseteq X \setminus A$ olup x öğesi $X \setminus A$ nın bir iç noktasıdır.

Örnek: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ kümesi kapalı değildir, ancak $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ kümesi kapalıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ metrik uzayında $A = \left\{(x,y) : y = \sin\frac{1}{x}, x > 0\right\}$ kümesi için $A^*\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ noktası bir yığılma noktasıdır.

2.11. Teorem: (X,d) metrik uzay olsun. F'nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\forall\, x \in X\backslash F$ için $d(x,F) \neq 0$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: F kapalı olsun. Bu durumda $X\backslash F$ açık olur. Bir $x \in X\backslash F$ seçelim. Buradan $B(x,r) \subseteq X\backslash F$ olacak şekilde $\exists\, r \in \mathbb{R}$ vardır. Şu halde $F \cap B(x,r) = \emptyset$ dir. Eğer $d(x,F) = 0$ olsaydı, $\exists\, z \in F \ni d(x,z) = 0$ dır. Burada $z \notin B(x,r)$ olup $0 = d(x,z) \geq r$ çelişkisi elde edilir.

$\Leftarrow$: $x \in X\backslash F$ ve $d(x,F) \neq 0$ olsun. $r = d(x,F)$ diyelim. Bu durumda $B(x,r) \subseteq X\backslash F$ dir. Gerçekten, $z \in B(x,r)$ ise $d(x,z) < r$ olur. Burada $r - d(x,z) > 0$ dır. Eğer $z \notin X\backslash F$ ise $z \in F$ dir. O halde $d(x,F) \leq d(x,z)$ dir. $d(x,F) > 0$ olduğundan $d(x,F) - d(x,z) \leq 0$ çelişkisi elde edilir.//

2.12. Teorem: (X,d) metrik uzay olsun. $\overline{A} = \{x :\ d(x,A) = 0\}$ dır.

İspat: $\Rightarrow$: $d(x,A) = 0$ olsun. O halde $\forall\, r \in \mathbb{R}$ için $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $x \in \overline{A}$ olur.

$\Leftarrow$: $x \in \overline{A}$ olsun. Eğer $r = d(x,A)$ olarak alırsak $A \cap B\left(x, \frac{r}{2}\right) = \emptyset$ olur. O halde $x \notin \overline{A}$ olup istenen elde edilir.

Örnek: (X,d) ayrık metrik uzay olsun. Her bir $x \in X$ için $\{x\}$ kümesinin bu uzayda hem açık hem de kapalı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\{x\}$ in açık olduğunu gösterelim. $y \in \{x\}$ olsun. $y = x$ dir. $r \leq 1$ olmak üzere $B(x,r) = \{x\}$ olduğunu yukarıdan biliyoruz. O halde $B(x,r) \subseteq \{x\}$ olduğundan $\{x\}$ kümesi açıktır.

METİK UZAYLARDA YOĞUN KÜME ve AYRILABİLİRLİLİK

2.8. Tanım (Yoğun Küme): (X, d) metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. Eğer $M^* = X$ ise M'ye X'de yoğun bir küme denir.

Buna göre, eğer A, X'de yoğun ise, ne kadar küçük olursa olsun, X'deki her yuvar, A'nın noktaları n'yi içerecektir; ya da diğer bir deyimle, bu durumda, A'nın noktalarını içermeyen bir komşuluğa sahip hiç bir $x \in X$ noktası yoktur.

Örnek: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ alışılmış uzayında yoğundur. Gerçekten, bir $x \in \mathbb{R}$ için her $\varepsilon > 0$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ olduğundan $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ olur. Buradan $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olur.

Örnek: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrik uzayında $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$ alt kümesini göz önüne alalım. $\overline{A} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\} \neq \mathbb{R}$ olduğundan A, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ uzayında yoğun değildir.

Örnek: (X, d) ayrık metrik uzay ise X'in kendisinden başka yoğun alt kümesi yoktur. Gerçekten; aksini varsayalım ve $\overline{A} = X$ olacak şekilde bir $A \subset X$ alt kümesi alalım. O halde, bir $x \in X$ için $x \notin A$ dır. Böylece $x \in \overline{A}$ olup $\forall\, r > 0$ için $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ dır. Ancak, $0 < r \leq 1$ için $B(x, r) = \{x\}$ olup $B(x, r) \cap A = \emptyset$ dır.

2.9. Tanım (Ayrılabilir Uzay): (X, d) metrik uzay olsun. Eğer bir X kümesi, X'de yoğun sayılabilir bir altkümeye sahipse bu kümeye ayrılabilirdir denir.

Örnek (Reel Eksen): $\mathbb{R}$ reel ekseni ayrılabilirdir.

Çözüm: Tüm rasyonel sayıların kümesi olan $\mathbb{Q}$ sayılabilir olup, $\mathbb{R}$'de yoğundur.

Örnek (Kompleks Düzlem): $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi ayrılabilirdir.

Çözüm: $\mathbb{C}$'nin sayılabilir yoğun bir altkümesi, reel ve sanal kısımlarının her ikisi de rasyonel olan tüm kompleks sayılardan oluşan bir kümedir.

Örnek (Diskre Metrik Uzay): Bir X diskre metrik uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart X 'in sayılabilir olmasıdır.

Çözüm: Söz konusu metriğin cinsi, X'in hiçbir gerçek altkümesinin, X'de yoğun olmasına imkân vermez. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek ($\boldsymbol{\ell_\infty}$ Uzayı): ℓ_∞ uzayı ayrılabilir değildir.

Çözüm: $y = (y_1, y_2, y_2, \cdots)$ dizisi 0 ve 1'lerden oluşan bir dizi olsun. Buna göre, $y \in \ell_\infty$ dur. y dizisiyle, ikilik sisteme göre gösterimi,

$$\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2^2} + \frac{y_3}{2^3} + \cdots$$

olan, reel bir y sayısını eşleyelim. Şimdi, $[0,1]$ aralığındaki noktalardan oluşan kümenin sayılamaz olduğunu, her bir $\hat{y} \in [0,1]$ sayısının ikilik sisteme göre bir gösterime sahip bulunduğunu ve farklı $\hat{y}$ ların farklı gösterimlerle temsil edildiklerini söyleyebiliriz. O halde, 0 ve 1'lerden oluşan sayılamaz çoklukta dizi vardır. ℓ_∞ üzerinde tanımlı metrik, bunlardan birbirine eşit olmayan herhangi ikisi arasındaki uzaklığın 1 birim olmasının gerektiğini gösterir. Eğer, bu dizilerin her birini, küçük birer yuvarın, örneğin, yarıçapı 1/3 olan bir yuvarın merkezi olarak düşünürsek, bu yuvarlar kesişmeyeceklerdir ve bunlardan sayılamayacak çoklukta bulabiliriz. Eğer, A, ℓ_∞ da yoğun herhangi bir küme ise, bu kesişmeyen yuvarların her biri A'nın bir elemanını içermek zorunda olur. Ve dolayısıyla, A sayılabilir olamaz. A'nın keyfi bir yoğun küme olması nedeniyle, bu durum, ℓ_∞ un sayılabilir yoğun altkümelere sahip olamayacağını gösterir. O halde, sonuç olarak, ℓ_∞ ayrılabilir değildir.

Örnek ($\boldsymbol{\ell_p}$ Uzayı): $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, ℓ_p uzayı, ayrılabilirdir.

Çözüm: A, n herhangi bir pozitif tam sayı ve y_i'ler rasyonel olmak üzere,

$$y = (y_1, y_2, y_2, \cdots, y_n, 0{,}0, \cdots)$$

şeklindeki tüm y dizilerinden oluşan bir küme olsun. A sayılabilirdir. Şimdi, A'nın, ℓ_p'de yoğun olduğunu göstermemiz gerekir. (x_i) keyfi bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j < \varepsilon^{P/2}$ olacak şekilde (ε'a bağlı) bir n sayısı vardır. (Sol taraftaki toplamın, yakınsak bir serinin kalan kısmı olduğuna dikkat ediniz.) Rasyonel sayılar yoğun olduğundan, her bir x_i için, buna yeterince yakın rasyonel y_i sayısı vardır. O halde,

$$\sum_{j=n+1}^{n}\left|x_j - y_j\right| < \varepsilon^{P/2}$$

olacak şekilde bir $y \in A$ dizisi bulabiliriz. Buna göre,

$$[d(x,y)]^p = \sum_{j=1}^{n}\left|x_j - y_j\right| + \sum_{j=n+1}^{\infty}\left|x_j - y_j\right| < \varepsilon^{P/2}$$

yazabiliriz. Dolay ısıyla, $d(x,y) < \varepsilon$ elde eder ve A'nın, Y'de yoğun olduğunu gösterir.

ALIŞTIRMALAR

1. (X,d) bir metrik uzay ve x ile y'de X'in birbirinden farklı iki elemanı olsun. Bu takdirde, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde x'in bir U ve y'nin bir V komşuluğu vardır. Gösteriniz.

Yol Gösterme: $\alpha = d(x,y)$ olmak üzere örneğin, $U = B(x, 3^{-1}\alpha)$ ve $V = B(y, 3^{-1}\alpha)$ alınız.

2. (X,d) bir metrik uzay ve k da pozitif sabit bir reel sayı olmak üzere $d_1(x,y) = k \cdot d(x,y)$ ile tanımlanan d_1 metriğini göz önüne alalım. X'in bir A alt kümesinin (X, d) de açık olması için gerek ve yeter şart (X, d_1) da açık olmasıdır. Gösteriniz.

3. $\mathbb{R}^2$ yi $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ve $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ metrikleri ile birlikte göz önüne alalım. $\mathbb{R}^2$ nin bir alt kümesinin $(\mathbb{R}^2, d_1)$ de açık olması için gerek ve yeter şart $(\mathbb{R}^2, d_2)$ da açık olmasıdır. Gösteriniz.

4. $\mathbb{R}^2$ yi $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ve $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ metrikleri ile birlikte göz önüne alalım. $\mathbb{R}^2$ nin bir alt kümesinin $(\mathbb{R}^2, d_1)$ de açık olması için gerek ve yeter şart $(\mathbb{R}^2, d_2)$ da açık olmasıdır. Gösteriniz.

5. $\mathbb{R}^2$ yi $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ ve $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ metrikleri ile birlikte göz önüne alalım. $\mathbb{R}^2$ nin bir alt kümesinin $(\mathbb{R}^2, d_1)$ de açık olması için gerek ve yeter şart $(\mathbb{R}^2, d_2)$ da açık olmasıdır. Gösteriniz.

6. $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ 4olmak üzere (X,d) nin

a) Her alt kümesinin açık

b) Her alt kümesinin kapalı

olduğunu gösteriniz.

7. Her $m,n \in \mathbb{Z}$ için k, 3 sayısı ile bölünemeyen bir tamsayı olmak üzere, $m - n = 3^t \cdot k$ olacak şekilde m ve n sayılarına bağlı bir tek $t = t(m,n)$ tamsayısı var olduğuna göre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ den $\mathbb{R}$ ye her $m,n \in \mathbb{Z}$ için, $d(m,m) = 0$ ve $m \neq n$ için $d(m,n) = 3^{-t}$ şeklinde tanımlanan d metriğini göz önüne alalım. (Z, d) metrik uzayında $B(0,1)$, $B(0,3)$ ve $B(0, 1/3)$ açık yuvarlarını bulunuz.

8. X sonlu bir küme ve (X,d) için bir metrik olsun.

a) X'in her alt kümesinin açık

b) X'in her alt kümesinin kapalı

olduğunu gösteriniz.

9. (X,d) bir metrik uzay ve z'de X'in herhangi bir elemanı olsun. $X\backslash\{z\}$ kümesinin açık olduğunu gösteriniz.

10. (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde X'in bir alt kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart her noktasının komşuluğu olması olduğunu gösteriniz.

11. (X,d) bir metrik uzay ve $x \in X$ olsun. X'in her sonlu alt kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

12. (X, d) bir metrik uzay ve X’in herhangi bir alt kümesi A olsun. Bu takdirde, A’nın kapanış kümesinin A’nın bütün yığılma (değme) noktaları kümesine eşit olduğunu gösteriniz.

13. (X, d) bir metrik uzay ve X’in herhangi bir alt kümesi A olsun. A^* kümesi kapalı mıdır? Neden?

14. Her açık yuvar bir açık kümedir ama bunun tersi doğru değildir. Neden?

15. Sürekli fonksiyonlar uzayında $C[0,2\pi]$ yi göz önüne alalım ve $x(t) = \sin t$ ve $y(t) = \cos t$ olmak üzere, $y \in B(x, r)$ olacak şekilde en küçük r sayısını bulunuz.

Çözüm: $B(x, r) = \{y \in C[a, b]: \max|x(t) - y(t)| \leq r, t \in [a, b]\}$ olduğundan $y \in B(x, r)$ için

$$\max_{t\in[0,2\pi]}|x(t) - y(t)| \leq r$$

dir. Maksimum kavramının tanımından her $t \in [0, 2\pi]$ için $|\sin x - \cos x| \leq r$ olur. Çap tanımından

$$\begin{aligned} r &= \sup\{x, y \in C[a, b]: d(x, y), t \in [0,2\pi]\} \\ &= \{\max|\sin x - \cos x| \leq r, t \in [0, 2\pi]\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

olur.

16. a) X ve $\emptyset$ hem açık hem de kapalı küme olduğunu gösteriniz.

b) Diskre bir X metrik uzayında her altkümenin, hem açık, hem de kapalı küme olduğunu gösteriniz.

17. Eğer x_o, bir $A \subset (X, d)$ kümesinin bir yığılma noktası ise, x_o'ın herhangi bir komşuluğunun, A'nın sonsuz çoklukta noktasını içerdiğini gösteriniz.

18. Aşağıdaki altkümelerin her birinin kapanışını belirleyiniz.

a) $\mathbb{R}$ üzerindeki tamsayılar

b) $\mathbb{R}$ üzerindeki rasyonel sayılar
c) $\mathbb{C}$'de reel ve sanal kısımları rasyonel olan kompleks sayılar
d) $\{z : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ diski

19. Bir metrik uzayda, bir $B(x_0, r)$ açık yuvarının kapanışı olan, $\overline{B(x_0, r)}$'nin, $B[x_0, r]$ kapalı yuvardan farklı olabileceğini gösteriniz.

20. a) $A \subset \overline{A}$
b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
c) $A \subset B$ ise $\overline{A} \subset \overline{B}$
d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
e) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
f) $\overline{\emptyset} = \emptyset$
g) $\overline{X} = X$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: a) 2.7. tanımda $\overline{A} = A \cup A^*$ olduğundan $A \subset \overline{A}$ olur.

b) $\overline{A} = A \cup A^*$ olduğundan $\overline{\overline{A}} = \overline{A} \cup \overline{A}^*$ olup $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ olur. Tersine $x \in \overline{\overline{A}}$ olsun. Bu takdirde x, $\overline{\overline{A}}$ da bir yığılma noktasıdır. Yani, x'in her U komşuluğunda x'den farklı en az bir elemanı vardır. x'in her U açığı $\overline{A}$ ya ait bir nokta içerir. Dolayısıyla A'ya ait bir nokta içerir. Buna göre $x \in \overline{A}$ olur. Şu halde $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ dir. Buna göre $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ dir.

c) $A \subset B$ ve $x \in \overline{A}$ olsun. Bu takdirde x, A'nın yığılma noktasıdır. Dolayısıyla x'in her U komşuluğunda A'nın x'den farklı en az bir elemanı vardır. Öyle ki

$$(U \backslash \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

olur. $A \subset B$ olduğundan

$$\emptyset \neq (U \backslash \{x\}) \cap A \subseteq (U \backslash \{x\}) \cap B$$

elde ederiz ki, bu bize, x'in aynı zamanda B'nin bir yığılma noktası olduğunu gösterir. Buna göre $x \in \overline{B}$ olur. Şu halde $\overline{A} \subset \overline{B}$ dir.

d) $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ olduğundan $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ ve $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ olup $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ olur. Yine $A \subset \overline{A}$ ve $B \subset \overline{B}$ olduğundan $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ yazılabilir. Buna göre

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

olur. Şu halde $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ dir.

e) $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ olduğundan $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ ve $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ olup $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ olur.

21. Kapalı bir $M \subset (X, d)$ kümesine ait olmayan bir x noktası, daima M kümesinden sıfırdan farklı bir uzaklıkta bulunur.

Çözüm: Bunu göstermek için, $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şartın $D(x, A) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Burada, A, X'in boş-olmayan herhangi bir alt kümesidir.

$x \in \overline{A}$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} D(x, A) &= \inf\{d(x, b) : b \in A\} \\ &= \inf\{d(x, b) : x \in \overline{A}, b \in A\} \\ &= \inf\{d(x, b) : x \in \overline{A}, b \in \overline{A}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Tersine $D(x, A) = 0$ olsun. Bu takdirde

$$D(x, A) = \inf\{d(x, b) : b \in A\} = 0$$

olup $x \in A$ dır.Şu halde $A \subset A \cup A^{*} = \overline{A}$ olacağından $x \in \overline{A}$ dır.

22. Sınırlı fonksiyonlar uzayı ($B[a, b]$ Uzayı) da $a < b$ olmak üzere, $B[a, b]$ nin ayrılabilir olmadığını gösteriniz.

23. Bir X metrik uzayının ayrılabilir olmasının gerek ve yeter şartın, X'in aşağıdaki özeliğe sahip sayılabilir bir Y altkümesine sahip olması olduğunu gösteriniz:

Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x \in X$ için, $d(x, y) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır.

Çözüm: $\Rightarrow$: X ayrılabilir olsun. Bu takdirde sayılabilir yoğun bir alt kümesi vardır.

$x \in X, \varepsilon > 0$ olsun. $Y \subset X$ de yoğun olduğundan $\overline{Y} = X$ ve $x \in \overline{Y}$ olur. Bu yüzden x'in her $B(x, \varepsilon)$ komşuluğu bir $y \in Y$ yi ihtiva eder. Bu ise $d(x, y) < \varepsilon$ olduğunu gösterir.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki problemde verilen özelliklerle beraber X'in sayılabilir alt kümesi Y olsun.

Her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \varepsilon$ olsun. Bu takdirde her $x \in X$ için

$(B(x,\varepsilon)\backslash\{x\}) \cap Y \neq \emptyset$
olacak şekilde $y \in B(x,\varepsilon)$ vardır. Dolayısıyla $x \in X$, Y kümesinin yığılma noktasıdır. x keyfi olduğundan X'in her noktası Y'nin bir yığılma noktasıdır. O halde $\overline{Y} = X$ dir. Buna göre Y, X^de yoğundur. Y, sayılabilir ve X'de yoğun olduğundan X ayrılabilirdir.

26. Açık bir kümenin, sürekli bir dönüşüm altındaki, görüntüsünün açık olmak zorunda bulunmadığını gösteriniz.

27. (X, d) metrik uzay olsun. $D(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$ olmak üzere;
i) $D(a,\emptyset) = \infty$
ii) $D(A,\emptyset) = d(\emptyset,A) = \infty$
iii) $D(\emptyset) = -\infty$
dir.

28. (X, d) metrik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Aşağıdakileri gösteriniz.

a) $(A^0)^0 = A^0$
b) $A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$
c) $A^0 \cap B^0 \subseteq (A \cap B)^0$
d) $A \subseteq B \Rightarrow A^0 \subseteq B^0$
olup olmadığını gösteriniz.

29. Bir metrik uzayda keyfi sayıda açık kümelerin arakesitinin açık olamayacağına dair bir örnek veriniz.

30. i) A ve B, $\mathbb{R}$ alışılmış uzayında açık kümeler ise
$$A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$$
açık olması gerekir mi?

ii) $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ açık kümeler ise $A + B = \{x \in A, y \in B\}$ nin açık olduğunu gösteriniz.

iii) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y > 1\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ de açık olduğunu gösteriniz.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI, Maltepe Üniversitesi, Foksiyonel Analiz Ders Notları, İstanbul, 2013.

2. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Fonksiyonel Analiz, 5. Baskı, Koza Yayıncılık, Ankara, 2017.

3. Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI, Genel Topoloji, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 73, Samsun, 1993.

4. Prof. Dr. Öner ÇAKAR, Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi, Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 5. Baskı, No: 13, Ankara, 2007.

5. Prof. Dr. Şenol DOST, Gerçel Analiz Ders Notları, Hacettepe Üniversitesi, Ankara, 2022.