3. BÖLÜM
METRİK UZAYLARDA
DİZİLER ve SÜREKLİLİK

METRİK UZAYLARDA YAKINSAKLIK ve CAUCHY DİZİSİ

3.1. Tanım: (X, d) metrik uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_{0(\varepsilon)} \ni \forall\, n > n_{0(\varepsilon)}, d(x_n, x) < \varepsilon$$

ise (x_n) dizisine x değerinde yakınsaktır denir. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.

Örnek: $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi için $d(x, y) = |x - y|$ metriğini göz önüne alalım.

$X = [0, 1]$ alırsak her n için $(x_n) \in X$

$$d(x_n, 0) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \text{ ise } 0 \in X$$

olduğundan (x_n), X'de 0'a yakınsar. //

Dikkat edilirse burada yakınsaklık kavramı uzaya göre değişir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ de $(x_n) = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ dizisi ve $(x_n) = (x_1, y_1)$, $(y_n) = (x_2, y_2)$ olsun.

$d(x, y) = \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

metriğine göre

$$d(x_n, (1, 0)) = d\left(\left(1, \frac{1}{n}\right), (1, 0)\right)$$
$$= \left\{|1 - 1|, \left|\frac{1}{n} - 0\right|\right\}$$

$$= \left\{0, \frac{1}{n}\right\} \to 0, (n \to \infty)$$

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{n}\right) \to (1, 0)$$

olur.

3.1. Teorem: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde X'de yakınsak bir dizi, sınırlıdır ve limiti tektir.

İspat: X'de (x_n), x'e yakınsak bir dizi olsun. Bu takdirde;

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_{0(\varepsilon)} \ni \forall\, n > n_{0(\varepsilon)}, d(x_n, x) < \varepsilon$$

dir. Özel olarak $\varepsilon = 1$ alırsak $n > n_{0(\varepsilon)}$ için $d(x_n, x) < 1$ elde edilir.

$$K = \max\{d(x_1, x), d(x_2, x), \cdots, d(x_n, x)\}$$

diyelim. Bu durumda her n için $d(x_n, x) < 1 + K$ olur. (x_n) dizisi sınırlıdır.

Şimdi kabul edelim ki $x_1 \neq x_2$ olmak üzere $x_n \to x_1$ ve $x_n \to x_2$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde;

$$x_n \to x_1 \text{ ise } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_{1(\varepsilon)} \ni \forall\, n > n_{1(\varepsilon)} \text{ ise } d(x_n, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$x_n \to x_2 \text{ ise } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_{2(\varepsilon)} \ni \forall\, n > n_{2(\varepsilon)} \text{ ise } d(x_n, x_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $\max\{n_{1(\varepsilon)}, n_{2(\varepsilon)}\} = n_{0(\varepsilon)}$ alalım. Her $n > n_{0(\varepsilon)}$ için,

$$d(x, y) \leq d(x_n, x_1) + d(x_n, x_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Herhangi iki sayı arasındaki metrik değerinin her pozitif sayıdan küçük olması bu iki sayının eşit olması ile mümkün olacağından $x_1 = x_2$ olur.

3.2. Teorem: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde

$$x_n \to x \text{ ve } y_n \to y \text{ ise } d(x_n, y_n) \to d(x, y)$$

dir.

İspat:

$x_n \to x$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_{1(\varepsilon)} \ni \forall\, n > n_{1(\varepsilon)}$ ise $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

$y_n \to y$ ise $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_{2(\varepsilon)} \ni \forall\, n > n_{2(\varepsilon)}$ ise $d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$

dir. $\max\{n_{1(\varepsilon)}, n_{2(\varepsilon)}\} = n_{0(\varepsilon)}$ alalım. Her $n > n_{0(\varepsilon)}$ için

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon$$

olduğunu göstereceğiz. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$
$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \le d(x_n, x) + d(y, y_n) \qquad (1)$$

$$d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$$
$$-d(x, x_n) - d(y, y_n) \le d(x_n, y_n) - d(x, y) \qquad (2)$$

(1) ve (2)'den

$$-d(x_n, x) - d(y_n, y) \le d(x_n, y_n) - d(x, y) \le d(x_n, x) + d(y, y_n)$$
$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
$$d(x_n, y_n) \to d(x, y)$$

olur.

3.3. Teorem: (x_n) ve (y_n) bir (X, d) metrik uzayında iki Cauchy dizisi olsun $a_n = d(x_n, y_n)$ ise (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz?

İspat: $a_n = d(x_n, y_n)$ şeklinde tanımlı olduğundan her şeyden evvel (a_n), $\mathbb{R}$'de bir dizidir. $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_{0(\varepsilon)} \ni \forall\, n > n_{0(\varepsilon)}$, $|a_n - a| < \varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$
$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \le d(x_n, x) + d(y, y_n) \qquad (1)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte m ve n'nin rolleri değiştirilecek olursa

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(y, y_n)$$

(1) ve (2)' den

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \le d(x_n, x) + d(y, y_n) \to 0,\ (n, m \to \infty)$$
$$|a_n - a| \to 0,\ (n \to \infty)$$

elde ederiz ki bu ise (a_n) dizisinin $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

3.2. Tanım: (Cauchy Dizisi): (X, d) metrik uzay ve her n için $(x_n) \in X$ bir dizi olsun. Eğer

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_{0(\varepsilon)} \ni \forall\, n, m > n_{0(\varepsilon)},\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

ise (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

3.4. Teorem: Bir metrik uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

İspat: (X,d) metrik uzay ve (x_n) yakınsak bir dizi olsun. Bu takdirde

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\ n_{0(\varepsilon)}\ \ni \forall\ n > n_{0(\varepsilon)},\ d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. Şu halde her $n, m > n_{0(\varepsilon)}$ için

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Bu ise (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Şimdi de tersinin her zaman doğru olmadığını gösterelim. Bunun için şu örneği göz önüne alalım.

$$X = (0,1],\ d(x,y) = |x-y|,\ (x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$$

dizisini göz önüne alalım. Her n için $(x_n) \in X$ dir.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\ n_{0(\varepsilon)}\ \ni \forall\ n,m > n_{0(\varepsilon)}$$

$$d(x_n,x_m) = |x_n - x_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0,\ (m,n \to \infty)$$

olur. Ayrıca;

$$d(x_n,x) = |x_n - x| = \left|\frac{1}{n} - x\right| \to 0 \Leftrightarrow x = 0$$

olmalıdır. Fakat $x = 0 \notin X$ olduğundan (x_n) dizisi X'de yakınsak değildir.

3.5. Teorem: (X,d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde bu uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

İspat: (x_n), X'de bir Cauchy dizi olsun. Bu takdirde;

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\ n_{0(\varepsilon)}\ \ni \forall\ n,m > n_{0(\varepsilon)},\ d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

dir. Burada özel olarak $\varepsilon = 1$ alırsak $n > n_{0(\varepsilon)}$ için $d(x_n,x_m) < 1$ elde edilir.

$$K = \max\{d(x_1,x_{n_0}), d(x_2,x_{n_0}), \dots, d(x_n,x_{n_0})\}$$

diyelim. Bu durumda her n için $d(x_n,x_{n_0}) < 1 + K$ olur. Böylece her n, m için

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_{n_0}) + d(x_{n_0},x_m) < 2K + 2 = \varepsilon$$

elde ederiz. Şu hale (x_n) dizisi sınırlıdır.

3.6. Teorem: Eğer bir (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisinin alt dizisi x değerine yakınsak ise bu takdirde dizinin kendisi de aynı x değerine yakınsaktır.

İspat: (x_n), (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde;

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\ n_{1(\varepsilon)}\ \ni \forall\ n,m > n_{1(\varepsilon)},\ d(x_n,x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. (x_{n_k}),(x_n)'in bir alt dizisi ise $x_{n_k} \to x \Rightarrow x_n \to x$ olduğunu göstermeliyiz.

$$x_{n_k} \to x \text{ ise } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_{2(\varepsilon)} \ni \forall\, n_k > n_{2(\varepsilon)},\ d\left(x_{n_k}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dir. max $(n_{1(\varepsilon)}, n_{2(\varepsilon)}) = n_{0(\varepsilon)}$ alırsak $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists n > n_{0(\varepsilon)}$ için

$$d(x_n, x) \leq d\left(x, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $x_n \to x$ olduğunu verir.

3.7. Teorem: (x_n) ve (y_n) bir (X, d) metrik uzayında iki Cauchy dizisi olsun $a_n = d(x_n, y_n)$ ise (a_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz?

İspat: $a_n = d(x_n, y_n)$ şeklinde tanımlı olduğundan her şeyden evvel (a_n), $\mathbb{R}$'de bir dizidir. $\exists\, n_{0(\varepsilon)} \ni \forall\, n, m > n_{0(\varepsilon)}$, $|a_n - a_m| < \varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \qquad (1)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte m ve n'nin rolleri değiştirilecek olursa

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \qquad (2)$$

(1) ve (2)' den

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \to 0,\ (m, n \to \infty)$$

$$|a_n - a_m| \to 0,\ (n, m \to \infty)$$

elde ederiz ki bu ise (a_n) dizisinin $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

3.8. Teorem (Yakınsak Dizi): Bir metrik uzaydaki her yakınsak dizi, bir Cauchy dizisidir. Bu teoremin tersi doğru değildir.

İspat: $x_n \to x$ ise, her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $n > n_{0(\varepsilon)}$ oldukça,

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_{0(\varepsilon)}$ sayısı vardır. Buna göre, üçgen eşitsizliği uyarınca, $m, n > n_{0(\varepsilon)}$ için,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde ederiz. Bu ise, (x_n) dizisinin bir Cauchy olduğunu gösterir.

METRİK UZAYLARDA TAMLIK

3.3. Tanım: (X, d) metrik uzay olsun. Eğer bu uzayda alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayı tamdır denir.

3.1. Sonuç: (X, d) bir tam metrik uzay olsun. Bu takdirde (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

Örnek: $\mathbb{R}$ reel sayıların tam olduğunu göstermek okuyucuya bıkılmıştır. Ama $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tam değildir. Çünkü mesela

$$(1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots) \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

olduğu için $\mathbb{Q}$ tam değildir.

3.9. Teorem (Tam Altuzay): Bir X tam metrik uzayının bir A altuzayının da tam olması için gerek ve yeter şart, A'nın X'de kapalı bir küme olmasıdır.

İspat: A tam olsun. 2.10. teoremi gereğince, her $x \in \bar{A}$ için, A'da x'e yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır. 3.8. teoremi gereğince, (x_n) bir Cauchy dizisi ve A tam olduğundan, (x_n) dizisi A'da yakınsak olup, 3.1. teoremi gereğince, limiti tekdir. Dolayısıyla, $x \in A$ yazabiliriz. Bu ise $x \in \bar{A}$'nin keyfi olarak seçilmiş olması nedeniyle, A'nın kapalı olduğunu ispatlar.

Tersine olarak, A kapalı bir küme ve (x_n), A'de bir Cauchy dizisi olsun. Buna göre, $x_n \to x \in X$ yazabiliriz. Bu ise, 2.10. teoremi gereğince, $x \in \bar{A}$ sonucunu gerektirir. Ve kabul gereği, $A = \bar{A}$ olduğundan, $x \in A$ bulunur. O halde, keyfi olarak alınan (x_n) Cauchy dizisi, A'da yakınsamaktadır. Bu da, A'nın tamlığını ispatlar. //

Şimdi tamlık örneklerine geçelim. Tamlık örnekleri için çeşitli uygulamalarda, bir X kümesi verilir (örneğin, bir diziler kümesi ya da bir fonksiyonlar kümesi) ve X üzerinde bir d metriği seçilerek, X kümesi bir metrik uzay haline dönüştürülür. Bundan sonra yapılacak iş ise, (X, d)'nin tam olma için gerekli özeliklere sahip olup olmadığının araştırılmasıdır. Tamlığı gösterebilmek için, X'de keyfi bir (x_n) Cauchy dizisi alıp bunun X'de yakınsak olduğunu gösteririz. Bu tür çözümler, farklı uzaylar için, çeşitli karışıklıklar gösterir ise de genel olarak izlenen yollar hemen hemen aynıdır:

(i) Limit olarak kullanılmak üzere, bir x eleman belirlenir,
(ii) x'in incelenen uzayda bulunduğu ispatlanır,
(iii) Metrik anlamında, $x_n \to x$ yakınsaklığı gösterilir.

Şimdi teorik ve uygulamalı araştırmalarda sık sık ortaya çıkan bazı uzayların tamlığına ilişkin örnekler verelim.

Örnek: Mutlak değer metriğine göre reel sayılar kümesi tamdır.

Çözüm: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere (x_n), $\mathbb{R}$'de herhangi bir Cauchy dizisi olsun. $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi sınırlı olduğundan (x_n) sınırlıdır. Ayrıca (x_n) sonsuz bir dizi olduğundan x_n'in terimlerinden oluşan küme sınırlı ve sonsuzdur. Şu halde (x_n) hem sınırlı hem de sonsuz çoklukta terime sahip olduğundan Bozlana-Weierstrass teoremi gereğince en az bir yığılma noktası vardır. Bu yığılma noktasını a ile gösterelim. Buna göre (x_n) dizisinin öyle bir alt dizisi yakınsak ise kendisi de aynı değere yakınsak olacağından $x_n \to a \in \mathbb{R}$ olacaktır. O halde $\mathbb{R}$ tamdır.

Örnek: Mutlak değer metriğine göre kompleks sayılar ($\mathbb{C}$) kümesi tamdır.

Çözüm: (z_n), $\mathbb{C}$'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde;

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_{0(\varepsilon)} \ni \forall n, m > n_{0(\varepsilon)}, d(z_n, z_m) = |z_n - z_m| < \varepsilon$

olacaktır. $z_n = x_n + i\, y_n$ ve $z = x + i\, y$ olmak üzere x_n ve y_n, $\mathbb{R}$'de birer dizidirler. Ayrıca $|x| \le |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|y| \le |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} |z_n - z_m| &= |(x_n + i\, y_n) - (x_m + i\, y_m)| \\ &= |(x_n - x_m) + i\,(y_n - y_m)| \\ &\le |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \qquad (1) \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca $|x_n - x_m| \le |z_n - z_m| < \varepsilon$ ise $n, m > n_{1(\varepsilon)}$ için $|x_n - x_m| < \varepsilon$ elde edilir. Bu ise (x_n) dizisinin $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. Yani

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_{1(\varepsilon)} \ni \forall n, m > n_{1(\varepsilon)}, d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

dir. Öte yandan $|y_n - y_m| \le |z_n - z_m| < \varepsilon$ ise $n, m > n_{2(\varepsilon)}$ için $|y_n - y_m| < \varepsilon$ elde ederiz. Bu ise (y_n) dizisinin $\mathbb{R}$'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $y_n \to y$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ vardır. Yani

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_{2(\varepsilon)} \ni \forall n, m > n_{2(\varepsilon)}, d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$

yazabiliriz. $z_n = x_n + i\, y_n$ ve $z = x + i\, y$ olmak üzere $z_n \to z$ olduğunu göstermeliyiz.

$d(z_n, z) = |z_n - z| = |(x_n - x) + i\,(y_n - y)| = |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$

$\max(n_1, n_2) = n_{0(\varepsilon)}$ dersek $n > n_{0(\varepsilon)}$ için $d(z_n, z) = |z_n - z| < \varepsilon$ elde edilir ki bu ise $z_n \to z$ olduğunu verir. $z_n \in \mathbb{C}$ ise $\mathbb{C}$ tamdır.

Örnek: $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayı ve $\mathbb{C}^n$'in üniter uzayı

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

metriğine göre tamdır.

Çözüm: Biz burada $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayını göstereceğiz. $\mathbb{C}^n$'in üniter uzayı benzer şekilde yapılacağından okuyucuya bırakılmıştır.

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki Euclid metriğin (x_n) ve (y_n) olmak üzere,

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$$

ile tanımlandığını hatırlayalım.

Şimdi, $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir (x_m) Cauchy dizisini ele alalım.

(x_m) Cauchy olduğundan, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $m, r > n_{0(\varepsilon)}$ oldukça,

$$d(x_m,x_r)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_{i(m)}-y_{i(r)})^2\right)^{1/2} < \varepsilon \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $n_{0(\varepsilon)}$ sayısı vardır. Kare alarak, $m, r > n_{0(\varepsilon)}$ ve her i için,

$$\left(x_{i(m)} - y_{i(r)}\right)^2 < \varepsilon^2 \text{ ve } \left|x_{i(m)} - y_{i(r)}\right| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Bu ise, her sabit i için, $(1 < i < n)$, $\left(x_{i(m)}\right)$ dizisinin, reel terimli bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Bu dizi, bir önceki örnek gereğince yakınsaktır. $m \to \infty$ için, $\left(x_{i(m)}\right)$ diyelim. Bu yolla elde edilen n tane limiti kullanarak, (x_i) tanımlayalım. Açıkça görüldüğü gibi, $x \in \mathbb{R}^n$ dir. (1)'den yararlanarak, $r \to \infty$ için,

$$d(x_m, x) < \varepsilon, \quad m > n_{0(\varepsilon)}$$

yazabiliriz. Bu da, x'in, (x_m) dizisinin limiti olduğunu gösterir ve (x_m) 'in keyfi bir Cauchy dizisi olarak alınmış olması nedeniyle de, $\mathbb{R}^n$'in tamlığını ispatlar.

$\mathbb{C}^n$ 'in tamlığı da, aynı tür bir ispat yöntemiyle yapılır.

Örnek: $\ell_\infty = \{(z_n): \sup|z_n| < \infty, n = 1,2,3, \dots\}$ uzayı

$d: \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$
$(z, w) \to d(z, w) = \{\sup|z_n - w_n|, n = 1,2,3, \dots\}$

metriğine göre tamdır.

Çözüm: $(z_m) = (z_i^m) = (z_1^m, z_2^m, z_3^m, \dots)$ olmak üzere $z = (z_m)$, ℓ_∞ da bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde;

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_{0(\varepsilon)} \ni \forall\, n, m > n_{0(\varepsilon)}, d(z_m, z_n) = \{\sup|z_i^m - z_i^n|, i = 1,2,3, \dots\}$

olmalıdır. Buradan keyfi fakat sabit her i için $(z_1^m, z_2^m, z_3^m, \dots)$ dizisinin kompleks sayılarca bir Cauchy dizisi olması demektir. Kompleks sayılar $(\mathbb{C})$ tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} z_i^m = z_i$ olacak şekilde $z_m \in \mathbb{C}$ vardır. Daha açık olarak

$$z_1 = (z_1^1, z_2^1, z_3^1, \dots), z_2 = (z_1^2, z_2^2, z_3^2, \dots), z_3 = (z_1^3, z_2^3, z_3^3, \dots), \dots$$

elde ederiz. $z_m \to (z_1, z_2, z_3, \dots)$ gösterelim. Şimdi $z \in \ell_\infty$ ve $z_m \to z$ olduğunu göstereceğiz. Her i için $|z_i^m - z_i^n| < \varepsilon$ olduğundan $m, n > n_{0(\varepsilon)}$ ve $n \to \infty$ limitini alırsak $|z_i^m - z_i| < \varepsilon$, $m > n_{0(\varepsilon)}$, $z_m = (z_i^m) \in \ell_\infty$ olduğundan i = 1, 2, 3, ... için $|z_i^m| < c_m$ olacak şekilde $c_m \in \mathbb{C}$ sayısı vardır. Böylece üçgen eşitsizliğinden

$$|z_i| = |z_i - z_i^m + z_i^m| \leq |z_i - z_i^m| + |z_i^m| < \varepsilon + c_m = K$$

dersek $|z_i| < K$ elde ederiz ki bu ise $z = (z_i) \in \ell_\infty$ olması demektir. O halde ℓ_∞ uzayı tamdır.

Örnek (Yakınsak Dizilerin Tamlığı): c yakınsak dizi uzayı, kompleks terimli tüm $x = (x_n)$ yakınsak dizilerinden oluşur ve ℓ_∞ üzerinde tanımlanan metriğe göre c uzayı tamdır.

Çözüm: c uzayı, ℓ_∞ uzayının bir altuzayıdır. Buna göre, c'nin ℓ_∞'da kapalı olduğunu gösterirsek, 3.9. teorem gereğince c'nin tamlığını söylemiş oluruz.

$\bar{c}$, c'nin kapanışını göstermek üzere, herhangi bir $x = (x_n) \in \bar{c}$ dizisini göz önüne alalım. 2.10. teoremi şıkkı gereğince, $x_n \to x$ olacak şekilde $x_n = \left(x_{i(n)}\right) \in c$ dizileri vardır. O halde, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $n > n_{0(\varepsilon)}$ ve her i için (özel olarak, $n = n_{0(\varepsilon)}$ ve her i için,

$$\left|x_{i(n)} - x_i\right| \leq d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $n_{0(\varepsilon)}$ sayısı vardır. $x_{n_{0(\varepsilon)}} \in c$ olduğundan, bu dizinin $x_{i(n)}$ terimleri yakınsak bir dizi oluştururlar. Böyle bir dizi ise, bir Cauchy'dir. Dolayısıyla,

$$\left|x_{i(n)} - x_{j(n)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, (i, j > n_{0(\varepsilon)})$$

olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır. Bu durumda, üçgen eşitsizliği, her $i, j > n_{0(\varepsilon)}$ için aşağıdaki eşitsizliği verir:

$$\left|x_{i(n)} - x_{j(n)}\right| \leq \left|x_i - x_{i(n)}\right| + \left|x_{i(n)} - x_{j(n)}\right| + \left|x_{j(n)} - x_j\right| < \varepsilon, (i, j > n_{0(\varepsilon)})$$

Bu da, $x_n = (x_{i(n)})$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterir. O halde, $x \in c$ 'dir. $x \in \bar{c}$ 'nin keyfi olarak alındığını düşünürsek, bu sonuç, c'nin ℓ_∞'da kapalı olduğunu gösterir ve c'nin tamlığı 3.9. teoremden elde edilir.

Örnek (ℓ_p 'nin Tamlığı): p sabit ve $1 < p < +\infty$ olmak üzere, ℓ_p uzayı tamdır.

Çözüm: $x_n = (x_{i(n)})$ olmak üzere, (x_n), ℓ_p uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Buna göre, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n > n_{0(\varepsilon)}$ için,

$$d(x_m, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_{i(m)} - x_{i(n)} \right|^p \right)^{1/p} \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $n_{0(\varepsilon)}$ sayısı vardır. Buradan, her i = 1,2, ... için,

$$\left| x_{i(m)} - x_{i(n)} \right| < \varepsilon, (n, m > n_{0(\varepsilon)}) \qquad (2)$$

yazabiliriz. Şimdi, sabit bir i seçelim. (2) yardımıyla, $(x_{i(m)})$ dizisinin, terimleri sayılar olan bir Cauchy dizisi olduğunu görüyoruz. ℝ ve ℂ'nin tam olması nedeniyle, bu dizi yakınsaktır. $m \to \infty$ için, $x_{i(m)} \to x_i$ diyelim. Şimdi de, bu limitleri kullanarak, $x = (x_i)$ dizisini tanımlayıp, $x \in \ell_p$ ve $x_m \to x$ olduğunu göstereceğiz.

(3)'den, her $m, n > n_{0(\varepsilon)}$ için,

$$\sum_{i=1}^{k} \left| x_{i(m)} - x_{i(n)} \right|^p < \varepsilon^p \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

yazabiliriz. Buradan da, $m > n_{0(\varepsilon)}$ olmak üzere, $n \to \infty$ için, elde ederiz. Buradan da, $m > n_{0(\varepsilon)}$ olmak üzere, $k \to \infty$ için,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| x_{i(m)} - x_i \right|^p < \varepsilon^p \qquad (3)$$

buluruz. Bu ise,

$$x_m - x = (x_{i(m)} - x_i) \in \ell_p$$

olduğunu gösterir. $x_m \in \ell_p$ olduğundan, Minkowski eşitsizliği gereğince

$$x = x_m - (x - x_m) \in \ell_p$$

elde ederiz. Ayrıca, (3)'deki seri, $[d(x_m, x)]^p$ büyüklüğünü belirtiğinden, (3) ifadesi, $x_m \to x$ sonucunu gerektirir. (x_m) 'in ℓ_p'de keyfi bir Cauchy dizisi olarak seçildiğinden, $1 < p < +\infty$ olmak üzere ℓ_p'nin tamlığını göstermiş oluruz.

Örnek (C[a, b] 'nin Tamlığı): [a, b], ℝ üzerinde, verilen herhangi bir kapalı aralık olmak üzere, C[a, b] sürekli fonksiyon uzayı

$$d(x_m, x_n) = \max|x_m(t) - x_n(t)|$$

metriğine göre tamdır.

Çözüm: (x_m), C[a, b] 'de herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n > n_{0(\varepsilon)}$ oldukça, [a, b] olmak üzere,

$$d(x_m, x_n) = \max|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \qquad (1)$$

olacak şekilde bir $n_{0(\varepsilon)}$ sayısı vardır. O halde, herhangi bir sabit $t = t_0 \in [a, b]$ için,

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon, \qquad (m, n > n_{0(\varepsilon)})$$

yazabiliriz. Bu ise, $(x_m(t_0))$ dizisinin, reel terimli bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Yukarıdaki örnekten $\mathbb{R}$'nin tam olması nedeniyle, bu dizi yakınsaktır. $m \to \infty$ için, $x_m(t_0) \to x(t_0)$ diyelim. Bu yolla, her bir $t \in [a, b]$ noktasıyla, bir tek reel $x(t)$ sayısı eşleyebiliriz. Bu ise, [a, b] üzerinde (noktasal) bir x fonksiyonu tanımlar ve çözümü tamamlamamız için geriye $x \in [a, b]$ ve $x_m \to x$ olduğunu göstermek kalır.

(1) yardımıyla, $n \to \infty$ için,

$$\max|x_m(t) - x(t)| < \varepsilon \qquad (m > n_{0(\varepsilon)})$$

yazabiliriz. O halde, her $t \in [a, b]$ için,

$$|x_m(t) - x(t)| < \varepsilon \qquad (m > n_{0(\varepsilon)})$$

bulunur. Görüldüğü gibi, bu sonuç, $(x_m(t))$ 'nin, [a, b] üzerinde, $x(t)$ 'ye düzgün olarak yakınsadığını ifade etmektedir. x_m 'lerin sürekli ve yakınsaklığın düzgün olması nedeniyle, diziler konusundan da bildiğimiz gibi, limit fonksiyonu olan x'de [a, b] üzerinde süreklidir. O halde, $x \in [a, b]$ yazabiliriz. Ayrıca, $x_m \to x$ 'dir. Bu da, C[a, b] 'nin tamlığını gösterir. //

Yukarıda vermiş olduğumuz bu örnek, aynı zamanda, aşağıdaki gerçeği de ispatlar:

3.10. Teorem (Düzgün Yakınsaklık): C[a, b] uzayında, $x_m \to x$ yakınsaklığı düzgündür. Yani, (x_m) dizisi, [a, b] üzerinde, x'e düzgün olarak yakınsar.

Buna göre, C[a, b] üzerindeki metrik, [a, b] üzerinde düzgün yakınsaklığı beklemektedir ve bu nedenle, bazen düzgün metrik adını da alır.

Tamlık ilkesini ve buna ilişkin kavramları daha iyi bir şekilde anlayabilmek için, tam olmayan bazı metrik uzay örnek vermek gerekir.

Örnek ($\mathbb{Q}$ Uzayı): $x, y \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $d(x, y) = |x - y|$ ile verilen alışılmış metrik altında, tüm rasyonel sayılardan oluşur ve rasyonel doğru adını alır. $\mathbb{Q}$ tam değildir.

Çözüm: Bunu göstermek için bu uzayda bir Cauchy dizisinin bu uzayda bir noktaya yakınsamadığını göstemek kafidir. Bunun için,

$$s_1 = \frac{1}{3} \;, \qquad s_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s_n^2 \quad , \; (n > 1)$$

ile tanımlanan (s_n) dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin yakınsaklığını incele-yelim. Bunun için pozitif terimli bu dizinin artan ve üsten sınırlı olduğunu gös-termeliyiz.

Önce bu dizinin tümevarımla üstten sınırlı olduğuna bakalım.

i) $n = 0$ için $s_1 = \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$

ii) $n = 1$ için $s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{27} < \frac{2}{3}$

iii) $n = k - 1$ için $s_k = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s_{k-1}^2 < \frac{2}{3}$ doğru olsun. Buna göre $n = k$ için $s_{k+1} < \frac{2}{3}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$s_{k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s_k^2 < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{27} < \frac{2}{3}$$

elde ederiz ki bu bize $0 < s_n < \frac{2}{3}$ olup (s_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir.

Şimdi (s_n) dizisinin artan olduğunu gösterelim. Bunu da tümevarım yöntemiyle yapacağız.

i) $n = 1$ için $s_2 - s_1 = \frac{10}{27} - \frac{1}{3} = \frac{1}{27} > 0$

ii) $n = k - 1$ için $s_k - s_{k-1} > 0$ olduğunu kabul ederlim. $n = k$ için $s_{k+1} - s_k > 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} s_{k+1} - s_k &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}s_k^2\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}s_{k-1}^2\right) \\ &= \frac{1}{3}s_k^2 - \frac{1}{3}s_{k-1}^2 \\ &= \frac{1}{3}(s_k^2 - s_{k-1}^2) \\ &= \frac{1}{3}(s_k - s_{k-1})(s_k + s_{k-1}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

O halde (s_n) dizisinin artandır. Buna göre (s_n) dizisi yakınsaktır.

(s_n) dizisi yakınsak olduğundan (s_{n+1}) dizisi de yakınsaktır. Bu yüzden

$$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_n = s$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} s_n^2 = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} s_n^2 = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} s^2 = s$$

$$s^2 - 3s + 1 = 0$$

$$s = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

ve

$$s_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{2}{3}, s_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{2}{3}$$

olduğundan $s_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{2}{3}$ (s_n) dizisinin limiti olamaz. Çünkü artan bir dizinin limiti üst sınırını geçemez. O halde

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

olduğundan (s_n) dizisi rasyonel Caauchy dizisi olmasına rağmen (s_n) irrasyonel sayıya yakınsamaktadır. Bu yüzden $\mathbb{Q}$ tam değildir.

Örnek (Polinomlar): X, sonlu ve kapalı bir [a, b] aralığı üzerinde tanımlı polinom fonksiyonları uzayı olsun. Yani

$$x = \{P : P : I \to \mathbb{R}, P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_n, a_n \in \mathbb{R}\}$$

uzayı tam uzay değildir.

Çözüm: Her polinom fonksiyonunun tanım aralığında süreklidir. Dolayısıyla her kapalı aralıkta her fonksiyonun bir maksimumu bir minimumu vardır. Bu yüzden bu uzayın metriği

$$d(x, y) = \{\max|x(t) - y(t)|, \ t \in [a, b]\}$$

olur. Bu metriğe göre uzay tam değildir. Gerçekten; x'de limiti olmayan Cauchy dizisi örneği bulabiliriz ki bu dizinin limiti bir polinom değildir. Şöyle ki;

$|x| < a < 1$ olmak üzere X'de $n \geq 1$ için $s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ olarak tanımlanan $(s_n(x))$ dizisini alırsak

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

elde ederiz ki bu bir polinom değildir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{1-x} \notin X$$

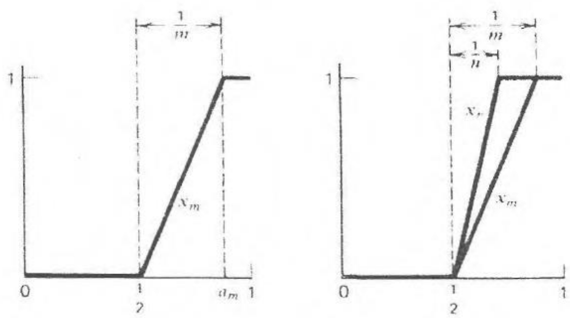
dir. Bu yüzden de X uzayı tam değildir.

Örnek (Lokal Sürekli Fonksiyonlar): X, [0,1] üzerinde, tüm sürekli, reel değerli fonksiyonlardan oluşan bir küme ve

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$$

olsun. Bu şekilde elde edilen (X, d) metrik uzayı tam değildir.

Çözüm:



Şeklin solundaki x_m fonksiyonları bir Cauchy dizisi oluştururlar. Çünkü $d(x_m, x_n)$, şeklin sağında görülen üçgenin alanı olup, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n > \frac{1}{\varepsilon}$ oldukça,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

'dur. Şimdi bu Cauchy dizisinin yakınsak olmadığını göstereceğiz.

$$a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \text{ olmak üzere, } x_m(t) = \begin{cases} 0\ ;\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1\ ;\ t \in [a_m, 1] \end{cases}$$

yazabiliriz. Buna göre, her $x \in X$ için,

$$d(x_m, x) = \int_0^1 |x_m(t) - x(t)| dt$$

$$= \int_0^{1/2} |x(t)| dt + \int_{1/2}^{a_m} |x_m(t) - x(t)| dt + \int_{a_m}^1 |1 - x(t)| dt$$

bulunur. İntegrantların negatif olmamaları nedeniyle, sağ taraftaki integrallerin her biri de negatif olmayan değerlerdir. O halde, $d(x_m, x) \to 0$ isteği, her bir integralin sıfıra yaklaşmasını gerektirir ve x'in sürekli olması nedeniyle,

$$x_m(t) = \begin{cases} 0\ ;\ t\epsilon\left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1\ ;\ t\epsilon[a_m, 1] \end{cases}$$

olması gerekir. Bu ise, sürekli bir fonksiyon için mümkün değildir. Dolayısıyla, (x_m) yakınsayamaz, yani, X'de bir limite sahip olamaz. Bu da X'in tam olmadığını gösterir.

METRİK UZAYDA SÜREKLİLİK ve DİZİSEL SÜREKLİLİK

3.4. Tanım (Süreklilik): (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\exists\ \delta > 0 \ni d_1(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ ise f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer f, X'in her bir noktasında sürekli ise f 'ye X'de süreklidir denir.

Bu tanıma göre f 'in x_0'da sürekli olması için gerek ve yeter şart

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

olmasıdır.

$$B(x_0, \delta) = \{x : d(x, x_0) < \delta, x \in X\}$$

$$B(f(x_0), \varepsilon) = \{f(x) : d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon, f(x) \in Y\}$$

3.11. Teorem: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f 'in X'da sürekli olması için gerek ve yeter şart Y'deki her açık kümenin ters görüntüsü X'de açık olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: Kabul eldim ki f, X-de sürekli $U \in Y$ 'de açık herhangi bir küme olsun. O halde göstereceğiz ki $f^{-1}(U) \in X$ açıktır.

$x \in f^{-1}(U)$ ise $f(x) \in U$, U açık olduğundan $B(f(x), \varepsilon) \subset U$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. f sürekli olduğundan $f(B(f(x), \varepsilon)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset U$ yazılabilir. Buradan

$$f\big(B(x, \varepsilon)\big) \subset U \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subset f^{-1}(U)$$

olduğundan $f^{-1}(U)$, X'de açıktır.

$\Leftarrow$: Tersine olarak kabul eldim ki U, Y'de herhangi bir açık olmak üzere $f^{-1}(U)$, X'de açık olsun. $a \in X$ keyfi bir nokta olsun. f 'in X'de sürekli olduğunu göstermek için keyfi bir $a \in X$ noktasında sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

$a \in X$ ise $f(a) \in Y$ 'dir. Şu halde $B(f(a), \varepsilon)$, Y'de bir açık yuvardır. Her açık yuvar bir açık küme olduğundan $B(f(a), \varepsilon)$, Y'de bir açık kümedir. Hipotezden dolayı $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, X-de açıktır. Şu halde her noktasının komşuluğunu içermeli. Yani $B(a, \varepsilon') \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ olacak şekilde bir $B(a, \varepsilon')$ açık yuvarı vardır. Bu ise f 'in $a \in X$ noktasında sürekli olması demektir. a keyfi bir nokta olduğundan f, X'de süreklidir.

3.12. Teorem: Bir $f : X \to Y$ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart herhangi bir kapalı $A \subset Y$ kümesinin ters görüntüsünün X'de kapalı bir küme olmasıdır.

İspatı 3.11. Teoreme benzer yöntemle yapılır.

3.5. Tanım (Dizisel Süreklilik): (X, d_1) ve (Y, d_2) birer metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ alalım. $x_n \xrightarrow{d_1} x_0$ şartını sağlayan her (x_n) dizisi için eğer $f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(x_0)$ oluyorsa f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında dizisel süreklidir denir. Yani $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, n_{0(\varepsilon)} \ni \forall\, n > n_{0(\varepsilon)}, \forall\, \delta > 0$ ise

$$d_1(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$$

dir.

3.13. Teorem: (X, d_1) ve (Y, d_2) birer metrik uzay ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ alalım. f 'nin $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart f 'nin x_0'da dizisel sürekli olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: Kabul edelim ki f bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olsun. Bu takdirde

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \forall\, \delta > 0 \;\; \exists\; d_1(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$$

dir. $x_n \xrightarrow{d_1} x_0$ ise

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \exists\, n_{0(\varepsilon)} \;\; \ni \forall\, n > n_{0(\varepsilon)},\, d_1(x_n, x_0) < \delta = \varepsilon' \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$$

olup f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında dizisel süreklidir.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki f, $x_0 \in X$ noktasında dizisel sürekli olsun. Göstermek istiyoruz ki f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir.

$$x_n \xrightarrow{d_1} x_0 \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$$

f fonksiyonu x_0 da süreklidir.

Kabul edelim ki f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında sürekli olmasın. Bu taktirde x_0 ın bir δ komşuluğunda öyle bir x değeri bula biliriz ki bu x'e karşılık $d_2(f(x_1), f(x_0)) > \varepsilon$ kalır. Buna göre bir $x_i \in B(x_0, \delta)$ için $d_2(f(x_1), f(x_0)) > \varepsilon$ kalacaktır.

$\delta = 1$ için $x_1 \in B(x_0, 1)$ ise $d_2(f(x_1), f(x_0)) > \varepsilon$ kalır.

$\delta = \frac{1}{2}$ için $x_1 \in B\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$ ise $d_2(f(x_1), f(x_0)) > \varepsilon$ kalır.

.
.
.

$\delta = \frac{1}{n}$ için $x_1 \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ ise $d_2(f(x_1), f(x_0)) > \varepsilon$ kalır.

Bu ise $x_n \xrightarrow{d_1} x_0$ iken $f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(x_0)$ değildir. O halde bu bir çelişkidir. Dolayısıyla f, $x_0 \in X$ noktasında süreklidir. x_0 keyfi olduğundan f, X'de süreklidir.

METRİK UZAYLARIN TAMLAŞTIRILMASI ve İZOMETRİK DÖNÜŞÜM

Yukarıda metrik uzayların bazılarının tam bazılarının ise tam olmadığını gördük. Mesela $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cümlesi tam değilken onu bir altuzay olarak ihtiva eden $\mathbb{R}$ nin tam olduğunu gördük. Aynı zamanda $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{R}$ de yoğun olduğunu biliyoruz. Aşağıda benzer şekilde keyfi bir metrik uzayın tamlaştırılışını göstereceğiz. Böylece tam olmayan bir metrik uzaydan *tasa* olan bir metrik uzay elde etmiş olacağız.

3.6. Tanım (İzometrik Dönüşüm): (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall\, x, y \in X$ için $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ oluyorsa yani f uzaklıkları koruyorsa f 'ye bir izometrik dönüşüm denir. Eğer f bir izometrik dönüşüm ise birebir (1-1) olduğu tanımdan açıktır. Çünkü $f(x) = f(y)$ izometri şartından $x = y$ olacaktır. Şayet bu f izometrisi aynı zamanda üzerine ise f 'ye izometrik izomorfi denir. Demek ki izometrik izomorfi birebir (1-1) üzerine ve uzaklıkları koruyan bir dönüşümdür.

X ve Y metrik uzayları arasında bir izometrik izomorfi varsa bu uzaylara izomorf (izometrik uzaylar) veya eş yapılı uzaylar denir ve $x \cong y$ şeklinde gösterilir.

Örnek: ($\mathbb{R}$, d), $d_1(x, y) = |x - y|$ alalım. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanıyor. f 'in bir

$$f(x) = x - 5$$

izometri olup olmadığını araştırınız?

Çözüm: $d_2(f(x), f(y)) = |(x-5)-(y-5)| = d_1(x, y)$
f, bir izometrik dönüşümdür.

Örnek: ($\mathbb{R}$, d), $d_1(x, y) = |x-y|$ alalım. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanıyor. f 'in bir

$$f(x) = x^3$$

izometri olup olmadığını araştırınız?

Çözüm: $d_2(f(x), f(y)) = |x^3 - y^3| \neq |x-y| = d_1(x, y)$
olduğundan f bir izomorfik dönüşüm değildir.

Örnek: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x+1, y+1)$
şeklinde tanımlanıyor. f 'nin izometrik dönüşüm olup olmadığını araştırınız.

Çözüm: Her $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için
$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
alalım.

$$\begin{aligned} d_2(f(x), f(y)) &= \sqrt{(x_1 + 1 - y_1 - 1)^2 + (x_2 + 1 - y_2 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= d_1(x, y) \end{aligned}$$

olduğundan f izometriktir.

Örnek: X en az iki elemanlı bir küme olsun. Bu küme üzerinde iki metrik tanımlıyalım:

$$d_1(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} \text{ ve } d_2(x, y) = \begin{cases} 2, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Birinci metriğe göre X kümesini X_1 ile, ikinci metriğe göre aynı kümeyi X_2 ile gösterelim. Bu durumda X_1 metrik uzayı ile X_2 metrik uzayı izometrik değildir, yani aralarında bir izometri fonksiyonu bulunamaz.

3.4. Tanım: (X, d) bir metrik uzay ve $(\widehat{X}, \hat{d})$ bir tam metrik uzay olsun. Eğer X, $\widehat{X}$'nın yoğun bir alt kümesi ile izometrik ise $(\widehat{X}, \hat{d})$ 'ya (X, d) metrik uzayının tamlaması denir.

Örnek: $\widehat{X} = \mathbb{R}$ ve $\hat{d} = d$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olsun. $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayını göz önüne alalım. Biliyoruz ki $(\mathbb{R}, d)$ metrik uzayı tamdır. Şimdi bu metrik uzayın $(\widehat{X}, \hat{d})$ alt metrik uzayını göz önüne alalım. $\widehat{X} = \mathbb{R}$ olup $\mathbb{R}$ yoğundur. Her metrik uzay kendisine izometrik olduğundan dolayısıyla $\mathbb{R}$ kendisine izometriktir. O halde $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$'nin bir tamlamasıdır.

Daha önce metrik uzayların bazılarının tam bazılarının ise tam olmadığını gördük. Mesela $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tam değilken onu bir altuzay olarak içeren $\mathbb{R}$ tamdır. Aynı zamanda $\mathbb{Q}$'nun $\mathbb{R}$'de yoğun olması sebebiyle $\mathbb{Q}$ tam değilken $\mathbb{Q}^* = \mathbb{R}$ tamdır.

Şimdi aşağıda keyfi bir metrik uzayın nasıl tamlaştırıldığını göreceğiz. Böylece tam olmayan bir metrik uzaydan tam olan bir metrik uzay elde etmiş olacağız.

3.14. Teorem: Her (X, d) metrik uzayının $(\widehat{X}, \hat{d})$ tamlaması vardır. Üstelik bir izometrik izomorfi farkıyla bu $(\widehat{X}, \hat{d})$ metriği tektir.

İspat: Bu teoremin ispatında takip edeceğimiz adımları şöyle bir sıralayalım.

1) $(\widehat{X}, \hat{d})$ bir metrik uzayıdır.
2) $X \cong Y$ ve Y'nin $\widehat{X}$'da yoğundur.
3) $\widehat{X}$'nın tamdır.
4) $\widehat{X}$'nın bir izometrik izometri farkıyla tekdir.

Şimdi bunları birer birer göstermeye çalışalım.

1) (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) *ve* (y_n) de bu uzayda iki Cauchy dizisi olsun.

$$(x_n)\Delta(y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

olarak tarif edilen Δ bağıntısı (X, d) metrik uzaydaki Cauchy dizilerinin kümesinde bir denklik bağıntısıdır.

(X, d) deki Cauchy dizilerinin bu bağıntıya göre denklik sınıflarını $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$ ile ve bu sınıfların kümesini de $\hat{x}$ ile gösterelim. Şimdi $(x_n) \in \widehat{X}$, $(y_n) \in \widehat{Y}$,

$$\hat{d}: \hat{x} \times \hat{x} \to \Delta$$

$$(X, Y) \to \hat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \qquad (1)$$

olarak tarif edilen $\hat{d}$'nin bir metrik uzay olduğunu göstermeden önce bu limitin mevcut ve bu $\hat{d}$'nin iyi tanımlı olduğunu göstermeliyiz.

Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$
$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizlikte m ve n'nin rolleri değiştirilecek olursa

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$

elde ederiz. Bu iki eşitsizlikten

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \qquad (2)$$

elde ederiz. (2) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifade (x_n) *ve* (y_n) birer Cauchy dizisi olduğundan 0'a gider. Dolayısıyla (1) limiti mevcuttur.

Şimdi bu limitin $(x_n) \in \widehat{X}$, $(y_n) \in \widehat{Y}$ olmak üzere bu temsili elemanlardan limitin bağımsız olduğunu gösterilir. Şu halde $(x_n)\Delta(x'_n)$ ve $(y_n)\Delta(y'_n)$ ise (2) eşitsizliğinde (x_n) *ve* (y_n) yerine sırasıyla (x'_n) *ve* (y'_n) yazarsak $n \to \infty$ için

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \to 0$$

elde edilir. Bu ise $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$ olması gerektirir.

Son olarak $\hat{d}$'nın bir metrik uzay olduğunu gösterelim.

$$\hat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = 0 \Leftrightarrow (x_n)\Delta(y_n) \Leftrightarrow \widehat{X} = \widehat{Y}$$

olur ve $\hat{d}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \hat{d}(\widehat{Y}, \widehat{X})$ olduğundan (M1) ve (M2) şartları sağlanır.

Metriğin 3. şartı için üçgen eşitsizliğinden $n \to \infty$ için

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$$
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n, y_n)$$
$$d(\widehat{X}, \widehat{Y}) \leq d(\widehat{X}, \widehat{Z}) + d(\widehat{Z}, \widehat{Y})$$

olur.

2) Şimdi birebir ve üzerine $T : X \to Y \subset \widehat{X}$ izometrisinin bulunuşu gösterelim: Bunun için T dönüşümü $T(b) = \hat{b}$ olarak tarif edelim. $b, c \in X$ için $(b_n) = (b, b, b, \ldots)$ ve $(c_n) = (c, c, c, \ldots)$, X 'de birer Cauchy dizisi ve $(c, c, c, \ldots) \in \hat{c}$ dir. Bu takdirde

$$\hat{d}(T(b), T(c)) = \hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) == \lim_{n\to\infty} d(b_n, c_n) = d(b, c)$$

olduğundan T bir izometridir. O halde $X \cong Y$ dir.

Y 'nin $\widehat{X}$ 'da yoğun olduğunu göstermek için $\hat{x} \in \widehat{X}$ ve $(x_n) \in \hat{x}$ olsun. Bu taktirde $\forall\, \varepsilon > 0$ için $n > n_{0(\varepsilon)}$ olduğunda $d\left(x_n, x_{n_{0(\varepsilon)}}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n_{0(\varepsilon)}$ sayısı vardır. $(x_{n_0}, x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots) \in \hat{x}_{n_0}$ olarak alalım. Böylece $T(x_{n_0}) = \hat{x}_{n_0} \in Y$ 'dir. (1) den dolayı $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_{n_0}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, \hat{x}_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ bu ise keyfi bir

$\hat{x} \in \hat{X}$ noktasının her ε civarında y'nin bir noktası olduğunu gösterir. O halde Y, $\hat{X}$'da yoğundur.

3) Şimdi $(\hat{X}, \hat{d})$ nin tam olduğunu gösterelim. $(\hat{x}_n)$, $\hat{X}$'de Cauchy dizisi olsun. Y, $\hat{X}$'de yoğun olduğundan $\forall\, \hat{x}_n \in \hat{X}$ için

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{z}_n) < \frac{1}{n} \qquad (3)$$

olacak şekilde bir $\hat{z}_n \in Y$ vardır. Böylece üçgen eşitsizliğinden $(m, n \to \infty)$

$$\hat{d}(\hat{z}_m, \hat{z}_n) \le \hat{d}(\hat{z}_m, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{x}_n) \to 0$$

Bu ise $(\hat{z}_m)$ 'nın y'de bir Cauchy dizisi olması demektir.

$T : X \to Y$ izometrisi birebir (1-1) ve üzerine olduğundan

$$T^{-1}(\hat{z}_m) = z_m$$

ise (z_m), X'de bir Cauchy dizisidir. O halde $(\hat{z}_m) \in \hat{x}$ olacak şekilde bir $\hat{x} \in \hat{X}$ vardır. Şimdi $(\hat{x}_m)$ 'nin limitinin x olduğunu göstereceğiz. (3)'den dolayı

$$\hat{d}(\hat{x}_n, x) \le \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}) < \frac{1}{n} + \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x})$$

elde ederiz. Diğer taraftan $(\hat{z}_n) \in \hat{x}$ ve $(\hat{z}_n) \in \hat{X}$, $(\hat{z}_n) \in \hat{Y}$ olduğundan $(z_n, z_n, z_n, \dots) \in \hat{z}_n$ dır. Böylece (1)'den dolayı

$$\hat{d}(\hat{x}_n, x) < \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} d(z_n, z_m)$$

yeteri derecede büyük m'ler için bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu ise $\hat{x}_n \to \hat{x}$ olduğunu gösterir. O halde $(\hat{X}, \hat{d})$ tamdır.

4) $(\hat{X}, \hat{d})$ 'nın tekliğini gösterelim.

Kabul edelim ki teoremdeki şartları sağlayan bir diğer metrik uzay (x_1, d_1) olsun. İlgili altuzayı da Y_1 ile gösterelim yani $Y_1 \subset X_1$ ve $\overline{Y}_1 \subset X_1$ ve $T' : X_1 \to Y_1$ izometrik izomorfi olsun. Bu taktirde $x_1, y_1 \in X_1$ için $x_n \to x_1$ ve $y_n \to y_1$ olacak şekilde Y_1 de (x_n) *ve* (y_n) dizileri vardır. Böylece (2) ifadesinin benzeri olarak elde edile bilecek

$$d_1(x_1, y_1) - d_1(x_n, y_n) + d_1(x_1, x_n) + d_1(y_1, y_n) \to 0, \ (n \to \infty)$$

ifadesinden anlaşılır ki $\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d_1(x_1, y_1)$ dır. Diğer taraftan

$$T(X) = Y \text{ ve } T'(X_1) = Y_1$$

olduğundan $T_1(Y, \hat{d}) \to (Y_1, d_1)$, $T_1 : T(X) = T'(x_1)$ olarak tanımlanırsa T_1 dönüşüm birebir (1-1) ve üzerine bir izometridir. Bu durumda $Y \cong Y_1$ ve $\overline{Y} = X$ olduğundan $\hat{X}$ ile X_1 arasındaki uzaklıklar aynı olmak zorundadır. Böylece $\hat{X} \cong X_1$ demektir.

ALIŞTIRMALAR

1. $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şart, x'in her V komşuluğu için, $n > n_{0(\varepsilon)}$ oldukça, $x_n \in V$ olacak şekilde bir n_o tamsayısının var olmasıdır. Gösteriniz.

2. Bir metrik uzayda, bir dizinin sınırlılığı bu dizinin

a) Cauchy dizisi,

b) yakınsak olması

için yeterli midir?

3. d_1 ve d_2, aynı X kümesi üzerinde iki metrik ise ve her $x, y \in X$ için,

$$a \cdot d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le b \cdot d_1(x,y)$$

olacak şekilde, pozitif a ve b sayıları varsa, (X, d_1) ve (X, d_2)'deki Cauchy dizilerinin aynı olduğunu gösteriniz.

4. X, $x = (x_i)$ şeklindeki tüm sıralı reel sayı ikililerinden oluşan uzay ve $y = (y_i)$ olmak üzere,

$$d(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

olsun. (X, d) 'nin tam olduğunu gösteriniz.

5. $A \subset \ell_\infty$, ancak sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeren tüm $x = (x_i)$ dizilerinden oluşan bir alt uzay olsun.

a) A'da öyle bir Cauchy dizisi bulunuz ki, bu dizi A'de yakınsamasın ve dolayısıyla A tam olmasın.

b) A uzayının tam olmadığını 3.9. teoremi uygulayarak gösteriniz.

6. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. [a, b] kapalı aralığının tamdır ama (a, b) açık aralığı $\mathbb{R}$'nin tam olmayan bir alt uzayıdır. Gösteriniz.

7. Tüm reel sayılardan oluşan kümenin

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$$

ile tanımlanan metrik altında tam olmayan bir metrik uzay oluşturduğunu gösteriniz.

8. X, tüm pozitif tamsayılar kümesi ve $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ olsun. (X, d)'nin tam olmadığını gösteriniz.

9. C[a, b] sürekli fonksiyon uzayında $x(a) = x(b)$ şartını sağlayan tüm $x = C[a, b]$ fonksiyonlarından oluşan $Y \subset C[a, b]$ altuzayının tam olduğunu gösteriniz.

10. [a, b] üzerindeki sürekli fonksiyonlardan oluşan bir (x_n) dizisi [a, b] üzerinde yakınsaksa ve [a, b] üzerindeki bu yakınsaklık düzgün ise, limit fonksiyonu olan x de [a, b] üzerinde süreklidir. Gösteriniz.

11. Diskre metrik uzayın tam olduğunu gösteriniz.

12. s uzayında $(x_n) = (x_{i(n)})$ ve $x = (x_i)$ olmak üzere, $x_n \to x$ olması için gerek ve yeter şartın, her i için, $x_{i(n)} \to x_i$ olduğunu gösteriniz.

13. s uzayında $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i[1 + |x_i - y_i|]}$ tanımlanan s dizi uzayının tam olduğunu gösteriniz.

14. Lokal sürekli fonksiyonlarda;

$$x_n(t) = \begin{cases} n & ; \quad 0 \le t \le n^{-2} \\ t^{-1/2} & ; \quad n^{-2} \le t \le 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan (x_n) dizisi;

a) Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.
b) Bu Cauchy dizisinin yakınsak olmadığını gösteriniz.

15. X, her biri ancak sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeren tüm $x = (x_i)$ reel dizilerinden oluşan metrik uzay ve $y = (y_i)$ olmak üzere,

$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ olsun. Burada söz konusu toplaman sonlu olduğuna, fakat terim sayısının x ve y'ye bağlı olduğuna dikkat ediniz. $x_n = (x_{i(n)})$ ve

$$x_{i(n)} = \begin{cases} i^{-2} \; ; \; i = 1,2,3,\dots,n \\ 0 \; ; \; i > n \end{cases}$$

olmak üzere tanımlanan (x_n) dizisinin;

a) Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.
b) Bu Cauchy dizisinin yakınsak olmadığını gösteriniz.

16. Bir metrik uzayı n, bir Y altuzayı sonlu çoklukta noktadan oluşuyorsa, Y 'nin tam olduğunu gösteriniz.

17. X, tüm rasyonel sayılar kümesi ve $d(x,y) = |x-y|$ ise, (X, d)'nin tamlanmışı nedir?

18. Bir X diskre metrik uzayının tamlanmışı nedir?

19. X ve Y izometrik ve X tam ise, Y'nin de tam olduğunu gösteriniz.

20. $T : X \to Y$ sürekli, tersi de sürekli, birebir ve örten ise X ve Y metrik uzayları homeomorfik'dir denir. Bu durumda

a) X ve Y izometrik iseler, bunların homeomorfik olduklarını gösteriniz.

b) Bir tam ve bir de tam olmayan metrik uzayın homeomorfik olabileceğini bir örnekle açıklayınız.

21. C[0, 1] ve C[a, b]'nin izometrik olduğunu gösteriniz.

22. (X, d) tam ise, $d_1 = \frac{d}{1+d}$ olmak üzere,

a) (X, d_1) 'nın da tam olduğunu gösteriniz.

b) (X, d_1) 'nın tamlığının, (X, d) 'nin tamlığını gerektirdiğini gösteriniz.

23. (x_n) *ve* (y_n), (X, d) 'de, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ gerçekleştirecek ve $x_n \to \ell$ olacak şekilde iki dizi ise, (x'_n) dizisinin yakınsak ve limitinin ℓ olduğunu gösteriniz.

24. (x_n) *ve* (y_n), (X, d) metrik uzayında yakınsak ve aynı ℓ limitine sahip iki dizi ise, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ bağıntısını gerçeklediklerini gösteriniz.

25. (x_n) *ve* (y_n), (X, d) metrik uzayında $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ bağıntısının, X'in elemanlarından oluşan tüm Cauchy dizilerinin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

26. (x_n), (X, d)'de bir Cauchy ve X'de $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ bağıntısını gerçekliyorsa, (y_n)'nün X'de bir Cauchy olduğunu gösteriniz.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI, Maltepe Üniversitesi, Foksiyonel Analiz Ders Notları, İstanbul, 2013.

2. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Fonksiyonel Analiz, 5. Baskı, Koza Yayıncılık, Ankara, 2017.

3. Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI, Genel Topoloji, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 73, Samsun, 1993.

4. Prof. Dr. Öner ÇAKAR, Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi, Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 5. Baskı, No: 13, Ankara, 2007.