4. BÖLÜM
NORMLU UZAY ve BANACH UZAYI

GİRİŞ ve VEKTÖR UZAYI KAVRAMININ HATIRLATILMASI

Normlu uzaylar, bir vektör uzayı üzerinde tanımlanan metrik uzaylara denir. Normlu uzayın tam olanlarına ise Banach uzayı adını verilir. Bunun için önce lineer cebir derslerinde tanımlanan vektör uzayını tekrar hatırlayalım, sonra da bazı vektör uzayı örneklerini verelim.

4.1. Tanım: $V \neq \varnothing$ ve V kümesi K cismi üzerinde,

$$\oplus: V \times V \to V$$
$$\otimes: K \times V \to V$$

işlemleri tanımlansın. Eğer $(V,\oplus,\otimes)$ sistemi üzerinde,

V1) $(V,\oplus)$ sistemi değişmeli grup,
V2) Her $a \in K$ ve her $u, v \in V$ kümesi için
$$a \otimes (u \oplus v) = (a \otimes u) \oplus (b \otimes v)$$
V3) Her $a, b \in K$ ve her $v \in V$ kümesi için
$$(a \oplus b) \otimes v = (a \otimes v) \oplus (b \otimes v)$$
V4) Her $a, b \in K$ ve her $v \in V$ kümesi için
$$a \otimes (b \otimes v) = (a \otimes b) \otimes v,$$
V5) Her $v \in V$ için $1 \otimes v = v$,

V1, V2, V3, V4 ve V5 aksiyomlarını sağlıyorsa $(V,\oplus,\otimes)$ sistemi bir vektör uzayıdır.

Örnek: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$
$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$
kümesi üzerinde toplama işlemini
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$
olmak üzere
$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
çarpma işlemini $\lambda \in \mathbb{R}$ için
$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$
olarak Euclid uzayını tanımlayalım.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: V1) $(\mathbb{R}^n, +)$ değişmeli grup mudur?

G1) Fonksiyon olduğundan kapalılık özelliğine bakılmaya gerek yoktur.

G2) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + ((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= ((x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \dots, (x_n + y_n)) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği vardır.

G3) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), 0 = (0,0, \dots ,0) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} x + 0 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0,0, \dots ,0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= x \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $0 + x = x$ gösterileceğinden $0 = (0,0, \dots ,0) \in \mathbb{R}^n$ birim (etkisiz) elemanıdır.

G4) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}), 0 = (0,0, \dots ,0) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{gathered} x + x^{-1} = 0 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) + (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}) = (0,0, \dots ,0) \\ (x_1 + x_1^{-1}, x_2 + x_2^{-1}, \dots, x_n + x_n^{-1}) = (0,0, \dots ,0) \\ x_1 + x_1^{-1} = 0, x_2 + x_2^{-1} = 0, \dots, x_n + x_n^{-1} = 0 \\ x_1^{-1} = -x_1, x_2^{-1} = -x_2, \dots, x_n^{-1} = -x_n \end{gathered}$$

olduğundan $x^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1})$ ifadesi $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ olur. Benzer şekilde $x^{-1} + x = 0$ gösterileceğinden $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ ters eleman olur.

G2) $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} x+y &= (x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n) \\ &= (x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \\ &= (y_1+x_1,y_2+x_2,\dots,y_n+x_n) \\ &= (y_1,y_2,\dots,y_n)+(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &= y+x \end{aligned}$$

olup değişmelidir. Buna göre $(\mathbb{R}^n,+)$ değişmeli gruptur.

V2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $x,y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \lambda(x+y) &= \lambda((x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)) \\ &= \lambda(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \\ &= (\lambda(x_1+y_1),\lambda(x_2+y_2),\dots,\lambda(x_n+y_n)) \\ &= (\lambda x_1+\lambda y_1,\lambda x_2+\lambda y_2,\dots,\lambda x_n+\lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)+(\lambda y_1,\lambda y_2,\dots,\lambda y_n) \\ &= \lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)+\lambda(y_1,y_2,\dots,y_n) \\ &= \lambda x+\lambda y \end{aligned}$$

olur.

V3) $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)x &= (\lambda+\mu)(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &= \lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)+\mu(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &= (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)+(\mu x_1,\mu x_2,\dots,\mu x_n) \\ &= (\lambda x_1+\mu x_1,\lambda x_2+\mu x_2,\dots,\lambda x_n+\mu x_n) \\ &= (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)+(\mu x_1,\mu x_2,\dots,\mu x_n) \\ &= \lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)+\mu(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &= \lambda x+\mu x \end{aligned}$$

olur.

V4) $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} (\lambda\cdot\mu)x &= (\lambda\cdot\mu)(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &= ((\lambda\cdot\mu)x_1,(\lambda\cdot\mu)x_2,\dots,(\lambda\cdot\mu)x_n) \\ &= (\lambda(\mu\cdot x_1),\lambda(\mu\cdot x_2),\dots,\lambda(\mu\cdot x_n)) \\ &= \lambda(\mu(x_1,x_2,\dots,x_n)) \\ &= \lambda(\mu\cdot x) \end{aligned}$$

olur.

V5) $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} 1\cdot x &= 1\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ &= (1\cdot x_1,1\cdot x_2,\dots,1\cdot x_n) \end{aligned}$$

$$= (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= x$$

olur. O halde $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ de bir vektör uzayıdır.

Örnek: $\mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \forall\, i = 1,2, \cdots, n, x_i \in \mathbb{C}\}$ tüm sıralı kompleks sayıların kümesi bir önceki örnekte gibi tanımlanmıştır. Bu $\mathbb{C}^n$ kümesi $\mathbb{C}$ de bir vektör uzayıdır.

Bu örneğin çözümü bir önceki örneğe benzediğinden okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek (C[a, b] uzayı): Her n için $[a, b]$ üzerinde sürekli, reel değerli bir fonksiyondur. Bu türdeki tüm fonksiyonların kümesi,

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t)$$
$$(\lambda x)(t) = \lambda \cdot x(t), \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

cebirsel işlemleri altında, reel bir vektör uzayı oluşturur.

Çözüm: x ve y, $[a, b]$ üzerinde sürekli ve reel değerli fonksiyonlar ve λ reel bir katsayı olmak üzere, $x + y$ ve λx fonksiyonları da $[a, b]$ üzerinde sürekli ve reel değerli birer fonksiyondur. Şöyle ki;

Her $t_0 \in [a, b]$ de keyfi bir nokta olsun. $x, y \in C[a, b]$ de herhangi iki fonksiyon olsun. Bu takdirde $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ vardır öyle ki $0 \leq |t - t_0| < \delta_1$ şartını sağlayan her t için

$$|x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. Benzer şekilde $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ vardır öyle ki $0 \leq |t - t_0| < \delta_2$ şartını sağlayan her t için

$$|y(t) - y(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ olmak üzere $0 \leq |t - t_0| < \delta$ şartını sağlayan her t için

$$\begin{aligned} |(x + y)(t) - (x + y)(t_0)| &= |x(t) + y(t) - x(t_0) - y(t_0)| \\ &\leq |x(t) - x(t_0)| + |y(t) - y(t_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu bize $x + y$ fonksiyonu t_0 da süreklidir. t_0 keyfi olduğundan $[a, b]$ süreklidir. Bu yüzden $x + y \in C[a, b]$ dir.

X sürekli bir fonksiyon ve λ skalerle çarpması sürekli olduğundan λX'de süreklidir. Gerçekten;

$\lambda = 0$ ise $\lambda X = 0 \cdot X = 0$ olduğundan λX süreklidir.

$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise $x \in C[a, b]$ de keyfi bir eleman olarak alınırsa $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ vardır öyle ki $0 \leq |t - t_0| < \delta$ şartını sağlayan her t için

$$|x(t) - x(t_0)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

kalır. Bu yüzden $0 \leq |t - t_0| < \delta$ şartını sağlayan her t için

$$\begin{aligned} |(\lambda x)(t) - (\lambda x)(t_0)| &= |\lambda x(t) - \lambda x(t_0)| \\ &\leq |\lambda| + |x(t) - x(t_0)| \\ &< |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz ki bu bize λX, t_0 da süreklidir. t_0 keyfi olduğundan $[a, b]$ süreklidir. Bu yüzden $\lambda x \in C[a, b]$ dir.

Şu halde $C[a, b]$ toplama ve skalerle çarpmaya göre kapalıdır.

Vektör uzayının diğer şartları okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek (B(A) uzayı): Bir A kümesi üzerinde tanımlı bütün sınırlı fonksiyonlar B(A) olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan bütün diferansiyellenebilir fonksiyonların uzayı, [a,b] de tanımlı bütün reel değerli vektör uzayıdır.

Çözüm: $B(A) = \{f \mid f : A \to \mathbb{R}, \sup|f(t)|\,, t \in A\}$

Her $x, y \in B(A)$ için $K_1 = \sup\limits_{t\in A} |x(t)| < \infty$ ve $K_2 = \sup\limits_{t\in A} |y(t)| < \infty$ yazabiliriz. Her $t \in A$ için

$$|x(t)| < K_1 \text{ ve } |y(t)| < K_2$$

olur. Buradan da her $t \in A$ için

$$|x(t) + y(t)| = |x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$$

elde edilir. Her iki tarafın $t \in A$ için supremumunu alırsak,

$$\begin{aligned} \sup|x(t) + y(t)| &\leq \sup\{|x(t)| + |y(t)|\} \\ &\leq \sup|x(t)| + \sup|y(t)| \\ &< K_1 + K_2 \end{aligned}$$

$$\sup|x(t) + y(t)| < \infty$$

elde ederiz ki bu bize $x + y$ sınırlı olduğunu gösterir. Yani $x + y \in B(A)$ dir.

Diğer taraftan her $t \in A$ için

$$\sup|(\lambda x)(t)| = \sup\{|\lambda||x(t)|\} = |\lambda| \sup|x(t)|$$

elde ederiz ki bu bize λx sınırlı olduğunu gösterir. Yani $\lambda x \in B(A)$ dir.

Bu yüzden de B(A) uzayı toplama ve skalerle çarpmaya göre kapalıdır.

Vektör uzayının diğer şartları okuyucuya bırakılmıştır.

Örnek (ℓ_2 Uzayı): ℓ_2 uzayında bir vektör uzayıdır.

Çözüm: $\forall\, x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$$

olduğundan Minkauski eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$$

yazılabilir ki bu bize $x, y \in \ell_2$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan $\forall\, x = (x_n) \in \ell_2$ ve $\lambda \in K$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

olup $\lambda x \in \ell_2$ olur. Dolayısıyla ℓ_2 toplama ve çarpmaya göre kapalıdır.

Vektör uzayının diğer şartları okuyucuya bırakılmıştır. //

Lineer bağımlılık-lineer bağımsızlık tanımları lineer cebir derslerinde anlatılmıştı. Burada bir örnek ile konuyu hatırlayalım.

Örnek: Gösteriniz ki,

$$x_i : [a, b] \to \mathbb{R},\ x_j(t) = t^j$$

ile tanımlanan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi $C[a, b]$ uzayında lineer bağımsız vektörlerin kümesi olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $t \in C[a, b], x_j(t) \in \mathbb{R}, x_j \in C[a, b]$ ve $\alpha_i \in [a, b]$ için

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t) = 0$$

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n = 0 \qquad (1)$$

yazılabilir. (1) ifadesinin türevi alırsak

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 t + \cdots + n\alpha_n t^{n-1} = 0 \qquad (2)$$

olur. (1) ifadesi her t doğru olduğundan $t = 0$ içinde doğru olup (2) ifadesinin $\alpha_1 = 0$ bulunur. Aynı şekilde 2. türevi alınırsa $\alpha_2 = 0$ olur. Bu ifade n defa türevi alınırsa $\alpha_n = 0$ olduğu gösterilir.

Eğer $[a, b]$ sıfırı içermiyorsa yani $t \neq 0$ ise o zaman

$$\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

elde ederiz. (3) den dolayı $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ olabilmesi için bu sistemin aşikâr olan çözümlerinin olması gerekir. Aşikâr çözüm olması için homojen sistemin katsayılar determinantı sıfırdan farklı olması gerekir. $t \neq 0$ olduğundan

$$\det \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t^n \end{bmatrix} = t \cdot t^2 \cdot t^3 \ldots t^n = t^{n(n+1)/2} \neq 0$$

olur. Bu yüzden de (3) sistemin çözümleri aşikar çözümdür. O halde $C[a, b]$ deki x_j polinomların $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

NORMLU UZAY ve BANACH UZAYI KAVRAMI

Norm kavramı lineer cebir derslerinde verilmişti. Norm kısaca vektörlerin uzunluklarına denilmişti. Şimdi burada vektörlerin metrik olmasına normlu uzay ve tam metrik uzay olmasına Banach uzayı adı verecek kavramlar üzerinde duralım.

4.2. Tanım: $X \neq \varnothing$ bir vektör uzayı olsun.

$$\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \to \|\cdot\|(x) = \|x\|$$

biçiminde tanımlansın. K bir cisim $\alpha \in K$ ve her $x, y \in X$ için

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

aksiyomlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonu X vektörü üzerinde bir norm fonksiyonudur. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir. K cismindeki değerlerin vektörlerde skalere karşılık geldiğini hatırlayalım.

Örnek: $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$ fonksiyonu bir normlu uzaydır.

Çözüm: Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

(N1) $\|x\| = 0$ ise $\int_0^1 |x(t)|dt = 0$ olması için $t \in [0,1]$ aralığında olması için $|x(t)| = 0$ olmasıyla mümkündür. Buna göre $x = 0$ dır. Tersine $x = 0$ ise $t \in [0,1]$ için $|x(t)| = 0$ olup $\int_0^1 |x(t)|dt = 0$ dır. Şu halde $\|x\| = 0$ olur.

(N2) $\|\alpha x\| = \int_0^1 |\alpha x(t)|dt = |\alpha| \int_0^1 |x(t)|dt = |\alpha| \, \|x\|$

(N3) $\|x + y\| = \int_0^1 |x(t) + y(t)|dt \le \int_0^1 |x(t)|dt + \int_0^1 |y(t)|dt = \|x\| + \|y\|$
elde edilir.

O halde $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Örnek: $p > 1$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$ ile tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonunun bir norm olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

(N1) $\|x\| = 0$ olsun. O halde $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 0$ olup her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $x_i = 0$ gerçeklenir. O halde $x = 0$ dır. Tersine $x = 0$ ise $\|x\| = 0$ olduğu açıktır.

(N2) $\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \, \|x\|_p$

(N3) Minkowski eşitsizliğinden

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

elde edilir.

O halde $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Örnek: $\ell_\infty = \{(x_n) : \sup|x_n| < \infty, n = 1,2,3, \dots\}$ uzayı üzerinde tanımlanan

$$\|x\| = \{\sup|x_n|, n = 1,2,3, \dots\}$$

fonksiyon bir normdur.

Çözüm: Her $x, y \in \ell_\infty$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

(N1) $\|x\| = 0$ olsun. Bu takdirde $\sup|x_n| = 0$ olduğundan her n için $0 \le |x_n| \le 0$ dır. O halde $x = (x_n) = 0$ bulunur.

Tersine $x = (x_n) = 0$ ise $\sup|x_n| = 0$ olduğundan $\|x\| = 0$ olduğu açıktır.

(N2) Her n için $\sup|x_n| < \infty$ olduğundan

$$\|\alpha\, x\| = \sup|\alpha\, x_n| = |\alpha| \sup|\, x_n| = |\alpha|\, \|x\|$$

yazılabilir.

(N3) Her n için $\sup|x_n| < \infty$ olduğundan

$$\|x + y\| = \sup|x_n + y_n| \le \sup\{|\, x_n| + y_n\} \le \sup|x_n| + \sup|y_n| = \|x\| + \|y\|$$

bulunur.

O halde $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Örnek: $C[a, b]$ sürekli fonksiyon uzayı üzerinde tanımlanan

$$\|x\| = \{\max|x(t)|, t \in I\}$$

fonksiyon bir normdur.

Bu örneğin çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

4.1. Teorem: $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay, her $x, y \in X$ için

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$$

dir.

İspat: Her $x, y \in X$ için (N3) aksiyomundan

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

olup buradan

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$$

gerçeklenir. Benzer şekilde $\|x\| - \|y\| \leq \|y - x\|$ de elde edilebilir. Bu iki eşitsizlikten ise

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

olduğu görülür.

4.1. Not: Bazı kitaplarda normlu uzay tanımlarında (N4) aksiyomu olarak $\|x\| > 0$ verilmektedir. Halbuki metrik uzay tanımından $d(x, y) > 0$ her zaman yazılabilir. Bu yüzden normlu uzaylarda da $\|x\| > 0$ gerekmemektedir.

4.2. Teorem: Metrik uzay üzerinde geçerli olan bütün özellikler aynı zamanda normlu uzaylar için de geçerlidir.

İspat: X bir normlu olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}, d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyonu metrik fonksiyonunun şartlarını sağladığını gösterelim.

(M1) $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ ise $x = y$

(M2) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$

(M3)

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - z\| + \|y - x\| = d(x, y) + d(y, z)$$

O halde her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır.

4.3. Teorem: Normlu bir X uzayı üzerinde bir norm tarafından doğurulan bir d metriği, öteleme değişmezliği adı verilen aşağıdaki iki özelliği gerçekler: Her $x, y, z \in X$ ve her α skaleri için

i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$

ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$

olur.

İspat: Bir d metriği üzerinde X normlu uzayı tanımlı olsun.

i) Her $x, y, z \in X$ için

$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$

olur.

ii) Her $x, y \in X$ ve her α skaleri için

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = \|\alpha(x - y)\| = |\alpha|\|x - y\| = |\alpha| d(x, y)$$

elde edilir.

4.2. Not: Bu önerme tek taraflıdır. Yani öteleme değişmezliğini gerçekleyen bir metrik normdan üretilmiştir denilemez. Bu önerme ile öteleme değişmezliği şartlarından en az birini gerçeklemeyen bir metriğin normdan elde edilmediği söylenebilir.

Örnek: $X \neq \{0\}$ vektör uzayı üzerinde tanımlı diskre metriği norm değildir.

Çözüm: $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in X$ ve $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq 1$ olacak şekilde bir α skaleri alalım. $x \neq y$ olduğundan $\alpha x \neq \alpha y$ olup

$$d(\alpha x, \alpha y) = 1 \neq |\alpha| d(x, y) = |\alpha|$$

bulunur. O halde öteleme değişmezliği gerçekleşmediğinden d metriği norm olamaz.

4.4. Teorem: Norm fonksiyonu süreklidir.

İspat: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu bir norm fonksiyonu olsun. Bir $x_0 \in X$ alalım. Bu fonksiyonu X üzerinde sürekli olduğunu göstermek için keyfi bir $x_0 \in X$ yerinde sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\exists\, \delta > 0 \ni \|x - x_0\| < \delta \text{ ise } |\|x\| - \|x_0\|| \leq \varepsilon$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\|$$

$$\|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\| \qquad (1)$$

$$\|x_0\| = \|x_0 - x + x\| \leq \|x_0 - x\| + \|x\|$$

$$\|x_0\| - \|x\| \leq \|x - x_0\| \qquad (2)$$

(1) ve (2)'den $|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| < \delta = \varepsilon$ alırsak $\|\cdot\|$ fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir. x_0 keyfi olduğundan $\|\cdot\|$, X'de süreklidir.

Stefan Banach
30 Mart 1892, Kraków, Polonya - 31 Ağustos 1945, Lviv, Ukrayna

4.3. Tanım: X normlu lineer uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X' e Banach Uzayı denir.

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \ell_\infty, \ell_2, \ell_p, C[a,b]$ birer Banach uzaylarıdır. Çünkü bu fonksiyonların bir kısmının normlu uzay olduklarını yukarıda gösterdik. Ayrıca tanımlanan fonksiyonların tam olduklarını bir önceki konularda inceledik. Dolayısıyla bu fonksiyonlar birer Banach uzayıdır. //

Şimdi tam olmayan ama tamlaştırabileceğimiz bir örnek verelim.

Örnek ($\mathbf{L_2[a,b]}$) Uzayı: [a, b] üzerindeki tüm sürekli, reel değerli fonksiyonlardan meydana gelen vektör uzayı

$$\|x\| = \left(\int_a^b x^2(t)dt \right)^2 \qquad (1)$$

ile tanımlanan fonksiyon norm altında, normlu bir X uzayı oluşturur. Bu uzay tam değildir. Örneğin, $[a,b] = [0,1]$ ise, X uzayı bir Cauchy dizisi olup olmadığını inceleyelim. $n > m$ için,

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_0^1 [x_n(t) - x_m(t)]^2 dt = \frac{(n-m)^2}{3mn^2} < \frac{1}{3m} - \frac{1}{3n}$$

yazabiliriz. Tanımlanan bu Cauchy dizisi yakınsak değildir. Ama ele aldığımız X uzayını tamlaştırılabilir. Şöyle ki herhangi bir, sabit $p > 1$ sayısı için, $[a,b]$ üzerinde tanımlı, tüm sürekli ve reel değerli fonksiyonlardan oluşan ve

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

ile tanımlanan norma sahip, normlu uzayın tamlaştırılır. Bu Banach uzayına $L_2[a, b]$ uzayı adı verilir. Buradaki p indisi, tanımlanan normun, sabit olarak korunan p sayısının seçimine bağlı olduğunu hatırlatmak amacıyla konulmuştur. $p = 2$ için, (1) 'yi verdiği açıktır. //

Burada aklımıza şöyle bir soru gelebilir: "Bir vektör uzay üzerindeki her metrik bir normdan elde edilebilir mi?" bu sorusunun cevabı "Hayır" dır. Şimdi bu soruyu ispatlayacak bir örnek verelim.

Örnek: s dizi uzayını hatırlayalım. s bir vektör uzaydır. Fakat, bunun üzerinde,

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|x_i-y_i|}{2^i\left[1+|x_i-y_i|\right]}$$

ile tanımlanan metrikten bir normdan elde edilemez.

ÇÖZÜMLÜ ALIŞTIRMALAR

1. x'in normu olan, $\|x\|$ büyüklüğünün, x'den 0'a kadar olan uzaklık olduğunu gösteriniz.

Normun tanımından bu soru çözülebileceğinden okuyucuya bırakılmıştır.

2. $X, x = (x_1, x_2)$ şeklindeki tüm sıralı reel sayı çiftlerinden oluşan vektör uzayı olsun. X üzerindeki normların,

a) $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$
b) $\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$
c) $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

ile tanımlandığını gösteriniz.

Çözüm: c)

(N1) $\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow \max\{|x_1|, |x_2|\} = 0$
$\Rightarrow \max|x_1| \geq |x_1|$ ve $\max|x_2| \geq |x_1|$
$\Rightarrow |x_1| \leq 0$ ve $|x_2| \leq 0$ (maksimumları 0 olduğundan)
$\Rightarrow x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$
$\Rightarrow x = (x_1, x_2) = (0,0) = 0$

(N2) $x, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\alpha x\|_\infty &= \max\{|\alpha x_1|, |\alpha x_2|\}\\ &= \max\{|\alpha||x_1|, |\alpha||x_2|\}\\ &= |\alpha| \max\{|x_1|, |x_2|\}\\ &= |\alpha|\|x\|_\infty\end{aligned}$$

(N3) $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\|x+y\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|\}$$

maksimum tanımından

i) $|x_1+y_1| \geq |x_2+y_2|$ ise

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= |x_1+y_1|\\ &\leq |x_1| + |y_1|\\ &\leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}\\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

ii) $|x_1+y_1| \leq |x_2+y_2|$ ise

$$\begin{aligned}\|x+y\|_\infty &= |x_2+y_2|\\ &\leq |x_2| + |y_2|\\ &\leq \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}\\ &= \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\end{aligned}$$

(i) ve (ii) den $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ olur.

O halde $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

3. Normlu bir $(X, \|\cdot\|)$ uzayında $S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ küresine birim küre adı verilir. $\mathbb{R}^2$ de $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ ile tanımlı norm veriliyor. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ uzayında $S(0,1)$ birim küresini belirleyiniz.

Çözüm: $\|x\| = 1$ olsun. O halde $\max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$ olur. Bu durumda $S(0,1)$ küresi

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 = \mp 1, -1 \leq x_2 < 1\}$$

kümesi ile

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 = \mp 1, -1 \leq x_1 < 1\}$$

kümelerinin birleşimidir. Bu ise merkezi orijinde bulunan birim karenin kenarlarıdır.

4. Normlu bir X uzayında,

$$B(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$
kapalı birim yuvarının konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x, y \in B(0,1)$ ve X de $B(0,1) \subset X$ olsun. Bu takdirde
$$M = \{z \in X : z = ax + (1-a)y, 0 \leq a \leq 1\} \subset B(0,1)$$
olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $x, y \in B(0,1)$, $z = ax + (1-a)y, 0 \leq a \leq 1$ olmak üzere $\|z\| \leq 1$ olduğunu göstermeliyiz.

$x, y \in B(0,1)$ olduğundan $\|x\| \leq 1$ ve $\|y\| \leq 1$ olduğu açıktır. Bu yüzden de X bir $\|\cdot\|$ olduğundan (N2) ve (N3) aksiyomundan dolayı

$$\begin{aligned}\|z\| &= \|\alpha x + (1-\alpha)y\| \\ &\leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\| \\ &= |\alpha|\|x\| + |1-\alpha|\|y\| \\ &\leq |\alpha| \cdot 1 + |1-\alpha| \cdot 1 \\ &= 1\end{aligned}$$
elde edilir. O halde $z \in M$ ise $z \in B(0,1)$ olur. Bu ise $M \subset B(0,1)$ dir. Bu yüzden de $B(0,1)$ bir komveks kümedir.

5. Normlu bir X uzayında bir M altkümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart, her $x \in M$ için, $\|x\| \leq c$ olacak şekilde, pozitif bir c sayısının var olmasıdır.

Metrik uzaylarda sınırlılık tanımları ve teoremleri yapılmıştı. Normlu uzaylar özel metrik uzay olduğundan metrik uzay kavramında olduğu gibi sorular çözülür.

6. Gösteriniz ki $\varphi(x) = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$ fonksiyonu reel sayıların tüm $x = (x_1, x_2)$ sıralı ikililerin uzayı üzerinde bir norm belirlemez.

Çözüm: Norm uzayı olmadığını göstermek için (N3) aksiyomunu sağlamadığını gösterelim. Bunun için $x = (1,9), y = (8,7)$ ile verilen $\mathbb{R}^2$ de iki sıralı ikili için
$$\varphi(x+y) = (\sqrt{|1+8|} + \sqrt{|9+7|})^2 = 49$$
$$\varphi(x) = (\sqrt{|1|} + \sqrt{|9|})^2 = 16$$
$$\varphi(y) = (\sqrt{|8|} + \sqrt{|7|})^2 (\sqrt{8} + \sqrt{7})^2 \cong 29{,}96$$

$$49 \not\leq 16 + 29{,}96$$
$$\varphi(x+y) \not\leq \varphi(x) + \varphi(y)$$

olduğunu gösterir ki, bu bize φ fonksiyonun $\mathbb{R}^2$ de bir norm olmadığını gösterir.

7. Eğer d bir normdan elde edilen bir vektör uzayı üzerinde bir metrik ve

$$d_1(x,y)=\begin{cases} d(x,y)+1\,, & x\neq y\\ 0\,, & x=y\end{cases}$$

şeklinde tarif edilsin. d_1 bir norm belirlemez.

Çözüm: $d_1(x,y)$ nın 4.3. teoremi sağladığını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} d_1(ax,ay) &= \begin{cases} d(ax,ay)+1\,, & ax\neq ay\\ 0\,, & ax=ay\end{cases}\\ &= \begin{cases} |a|d(x,y)+1\,, & ax\neq ay\\ 0\,, & ax=ay\end{cases}\\ &= \begin{cases} |a|d(x,y)+1\,, & x\neq y\\ 0\,, & x=y\end{cases}\\ &= |a|\begin{cases} d(x,y)+\frac{1}{|a|}\,, & x\neq y\\ 0\,, & x=y\end{cases}\end{aligned}$$

$$d_1(ax,ay)\neq |a|d_1(x,y)$$

bulunur. O halde d_1, X üzerinde tanımlanan metrikten elde edilen metrik değildir.

KAYNAKÇA

1. Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI, Maltepe Üniversitesi, Foksiyonel Analiz Ders Notları, İstanbul, 2013.

2. Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR, Fonksiyonel Analiz, 5. Baskı, Koza Yayıncılık, Ankara, 2017.

3. Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI, Genel Topoloji, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Yayın No: 73, Samsun, 1993.

4. Prof. Dr. Öner ÇAKAR, Fonksiyonel Analize Giriş, Ankara Üniversitesi, Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 5. Baskı, No: 13, Ankara, 2007.